EL PROBLEMA DE LOS CARDINALES SINGULARES

ANDRÉS EDUARDO CAICEDO NÚÑEZ
9223365

Tesis de Grado

Director: XAVIER CAICEDO FERRER

Universidad de los Andes
Departamento de Matemáticas

Santafé de Bogotá, D. C., Julio de 1996

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Creo que por el golpe que del vivo
rayo sufrí, me habría extraviado
si no hubiese separado de él mis ojos

y recuerdo que tan audaz por esto
fui para soportarlo, que mi vista
vencí con el valor del infinito.

Dante Alighieri, *La Divina Comedia*,
Paraiso, XXXII, 76–81 (1321).

Agradecimientos

Por tantas cosas... Seguro muchos se quedarán por fuera. Lo reconozco, no están todos aquí —De paso, una buena excusa—. Primero, a Xavier Caicedo, sin duda el mejor profesor que haya conocido y una fuerza siempre motivante. La teoría de conjuntos... no sé, no estoy seguro desde cuando; *sé* que me gustaba desde antes, pero la emoción, la fuerza, la vida que adquirió luego de Sergio Fajardo y Carlos Montenegro no pueden ocultarse. A Sergio también le agradezco un par de lecciones que no fueron matemáticas. El tema de este trabajo casi que surgió solo, casi que pugnaba por ser visto. Por fortuna, ahí estuvo Andrés Villaveces, para ayudarme a verlo e impulsarme.

A mis amigos, que estaban ahí cada vez que los necesitaba. ¡Y vaya que los necesité! A Juan Carlos Uribe, quien además mostró que la paciencia es infinita, o casi, y me proveyó con una copiosísima bibliografía.

A Johanna... Digamos que acá el lugar común de la dificultad del primer paso aparecía insalvable. Sin tu sacudida, lo habría sido.

Índice

Introducción

Al ser destapado por el gigante, el cofre dejó escapar un aliento glacial. Dentro sólo había un bloque transparente.
(. . .)
Desconcertado, sabiendo que los niños esperaban una explicación inmediata, José Arcadio Buendía se atrevió a murmurar:
– Es el diamante más grande del mundo.
– No —corrigió el gitano—. Es hielo.

(Gabriel García Márquez, *Cien Años de Soledad*, (1967).)

El tema de este trabajo es *El Problema de los Cardinales Singulares*, el estudio de las libertades y limitaciones en el comportamiento de la exponenciación cardinal. La versión más conocida del problema es la referente a *la Hipótesis del Cardinal Singular*, una afirmación sobre la exponenciación que la determina por completo; el objeto de esta introducción es presentar una exposición de su evolución histórica, enmarcándola en el desarrollo general de la teoría de conjuntos.

Este trabajo es una recopilación de los resultados conocidos respecto al Problema de los Cardinales Singulares, tan exhaustiva como ha sido posible; pero no es sólo una recopilación, pues estos resultados aparecen relacionados unos con otros, ilustrando una compleja y fascinante arquitectura matemática, que abarca ideas de muy diversas áreas conjuntistas, desde casi sus orígenes hasta hoy día. Ocasionalmente, los artículos que hablaban del problema dedicaban unas cuantas páginas a ilustrar su historia, pero nunca presentaban información suficiente respecto a las técnicas o ideas utilizadas, a menos (en ocasiones) que fuesen a ser empleadas directamente. Por eso, y puesto que aun no ha aparecido ningún trabajo publicado en libros que intente una tal recopilación y relación (habrá que esperar la publicación del segundo volumen de [K]), emprender esta tarea era una labor justificada. Espero que el producto final sea para el lector tan satisfactorio como lo imaginé según lo realizaba.

En los capítulos discutiremos los resultados que se han obtenido hasta el momento. Estos son de dos tipos: resultados absolutos, es decir teoremas de ZFC, que abarcan las limitaciones conocidas, y resultados de consistencia relativa, es decir (meta)teoremas que muestran libertades y restricciones consistentes en la exponenciación, módulo la consistencia de ZFC o de sus extensiones por cardinales grandes. Estos resultados también muestran que es necesario asumir la consistencia de tales cardinales.

Esperamos que este trabajo sirva como motivación a un lector interesado para investigar y profundizar en los temas aquí tratados; al menos, esa fue una de las directrices seguidas en su elaboración. Dicho lector se encontrará con varios de los resultados e ideas más elegantes y llamativos de la teoría de conjuntos.

Ninguno de tales resultados o ideas es de mi autoría, y excepto por algunos detalles menores o demostraciones sencillas, tampoco me corresponden créditos por las pruebas dadas.

Es conveniente dar ahora una breve justificación de lo que sigue. Quizás la mejor forma de hacerlo sea explicar cómo surgió la idea de realizar este trabajo: Básicamente fue una conjunción afortunada de coincidencias. Se debió a mi encuentro casi simultaneo con dos artículos, [DJe] y [FWo], y a un seminario informal que por esa época llevé a cabo con Andrés Villaveces. Andrés acaba de terminar su doctorado en la Universidad de Wisconsin en Madison, y estuvo en Colombia hace ya un año largo. Su energía, su entusiasmo, y el apoyo que recibí de él me convencieron de adoptar el problema de la exponenciación como el tema de mi tesis. En ese entonces yo sabía del resultado de Easton, pero ignoraba todas las dificultades inherentes a su generalización para cardinales singulares. El artículo de Foreman y Woodin [FWo] me sorprendió bastante: era una exposición muy reciente de un resultado que yo suponía debía ser clásico, y que aparecía presentado en un contexto donde los cardinales grandes jugaban un papel primordial, algo que no sabía que fuera necesario. En contraste, el artículo de Devlin y Jensen [DJe], que encontré bastante arduo por su dependencia en teoría de estructura fina, sobre la que tampoco sabía casi nada, indicaba que los cardinales grandes eran indispensables. Fui afortunado en poder reconstruir aproximadamente la historia del problema de la exponenciación en poco tiempo a partir de ese momento. Comprendí que era un tema central para la teoría moderna de conjuntos, y pude observar con relativa claridad el edificio de resultados y teorías que había crecido a su alrededor. En el seminario con Andrés tratamos de cardinales grandes, vimos el resultado de Easton, y me encontré por primera vez con el orden $\triangleleft$ de Mitchell y el concepto de extender. Le agradezco muchísimo por todo lo que me brindó ese seminario, y por el convencimiento que obtuve con él de que una exposición que siguiera el desarrollo histórico del problema era un trabajo que bien valía la pena llevar a cabo.

Y eso es lo que he intentado. Este documento comienza con la historia del problema de los cardinales singulares: informalmente, qué tanta libertad tiene la función $\kappa \mapsto 2^\kappa$; y luego se centra en los resultados específicos que se han ido encontrando. Algunos de estos resultados son puramente combinatorios, y han sido presentados en detalle. Otros requieren más familiaridad con forcing o con estructura fina, de modo que sólo se han incluido ideas que esperan ilustrar los argumentos de sus demostraciones, ocasionalmente presentando los detalles de lemas o afirmaciones que puedan surgir en el curso de las mismas.

La exposición está acompañada de constantes referencias a resultados adicionales o futuras generalizaciones. Tales referencias son incompletas, pero esperan ilustrar la profunda relación que tienen entre sí los temas tratados, e indicar vías distintas de desarrollo de estos temas.

1. Metodología.

Comencemos con una rápida descripción de cada capítulo:

El orden seguido en estos será, aproximadamente, histórico. Esto en particular no es cierto en los capítulos 0 y 1, debido a la profusión de temas tratados, aunque sí lo es 'localmente'. Esta Introducción debería servir para orientar en caso de cualquier confusión al respecto.

El capítulo 0 básicamente consta de prerrequisitos; su considerable extensión es debida a nuestro deseo de ser tan autocontenidos como fuese posible, y es esencial para todos los demás. Ahí se explica la notación, y se indican algunos resultados combinatorios que son usados más adelante. Tales resultados usualmente son mencionados sin demostración, pero hay suficientes referencias para poder ubicar los detalles faltantes en la literatura. Lo mismo se aplica, cuando sea el caso, para los demás capítulos. Éste comienza con una serie de resultados elementales respecto a la exponenciación y a productos infinitos que serán utilizados permanentemente en el resto del trabajo, e incluye además un tratamiento cuidadoso de la teoría de cardinales grandes, aunque específicamente orientada a su relación con los problemas de aritmética; muchos otros temas interesantes de esta teoría han sido dejados de lado, y hubiera sido imposible proceder de otra forma. Hay una sección donde se introducen nuestras convenciones de forcing y se presentan una serie de lemas técnicos al respecto, y otra donde se define la jerarquía $(J_\alpha)_\alpha$ para dar algunas ideas básicas de estructura fina.

En el capítulo 1 incluimos los resultados de Silver y Galvin-Hajnal sobre limitaciones en el comportamiento y cotas para la exponencial de cardinales singulares de cofinalidad no contable. Hay también algunos resultados clásicos, como el de Scott o el de Solovay, que ilustran cómo la presencia de cardinales grandes afecta la aritmética. En forcing, damos los resultados de Easton y Prikry-Silver. Y también explicamos el lema de cubrimiento de Jensen.

Los capítulos 2, 3 y 4 exponen cada uno el uso de una técnica particular, que les da su nombre, en el establecimiento de resultados en la aritmética.

En el capítulo 2 se exponen los fundamentos de la teoría de pcf de Shelah, y se muestran sus principales aplicaciones a la aritmética cardinal. Éste es el capítulo más independiente de todo el trabajo, y el último donde se presentan pruebas detalladas.

A pesar de la falta de detalles, esperamos haber proveído información suficiente para apreciar los resultados y técnicas involucrados. Uno de los principales motivos de esta omisión es la extensión de las demostraciones; incluirlas hubiera facilmente triplicado la longitud del documento, y exigiría aumentar nuestra lista de prerrequisitos.

En el capítulo 3 se muestra la evolución de la teoría de core models, junto con una rápida exposición de su utilidad a la hora de establecer cotas inferiores en consistencia para afirmaciones respecto a la libertad de la exponenciación.

En el capítulo 4 se exponen los resultados de forcing relevantes al tema del trabajo y posteriores a los incluidos en el capítulo 0. Estos resultados pueden discutirse desde dos puntos de vista: O bien *describen un método* para establecer la consistencia de las hipótesis en consideración, o bien *establecen cotas superiores* para tal consistencia, y ambas formas de abordar el tema son tratadas aquí.

Finalmente, en el capítulo 5 se discuten tópicos que en este trabajo no han sido tratados antes: el efecto de la conjetura de Chang en la aritmética, la relevancia para ésta de la existencia de ideales saturados, algunas observaciones rápidas sobre el cardinal de ultraproductos, y sobre la exponencial de los puntos fijos de la sucesión de los aleph. El capítulo concluye mencionando una serie de preguntas abiertas.

Cada capítulo depende los anteriores, o bien en cuanto a resultados y técnicas, o bien en cuanto a notación. No son, entonces, independientes entre sí, y de cualquier modo esto hubiera sido imposible: por ejemplo, el lema de cubrimiento de Dodd-Jensen involucra una sucesión genérica de Prikry, y hay relaciones profundas entre sucesiones de extenders y forcing de Radin, ver [DoJe2] y [Cu3].

2. Orígenes del Problema.

La teoría de conjuntos, vista como el estudio de los números *transfinitos*, debe su origen a las investigaciones de Georg Cantor en el último cuarto del siglo pasado sobre la unicidad de la representación de una función, definida en un intervalo, en series trigonométricas.

Cantor investigó en qué subconjuntos del intervalo podía prescindirse de la hipótesis de convergencia de las series sin alterar el resultado de unicidad. Sus trabajos lo llevaron a interesarse en subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos mediante procesos iterativos repetidos ω o más veces. Específicamente, Cantor consideraba, dado $P \subseteq \mathbb{R}$, la sucesión $P, P', P'', \dots, P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, \dots, P^{(\infty\cdot 2)}, \dots$, donde $P^{(k+1)}$ es el conjunto de puntos límite de $P^{(k)}$, $P^{(\infty)}$ es lo que en notación moderna llamaríamos $P^{(\omega)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$, etc. El estudio de los órdenes de las sucesiones iteradas eventualmente desembocó en la teoría de buenos órdenes. Un interesante ensayo al respecto puede verse en la introducción de Philip Jourdain a [C].

Desde sus comienzos, la teoría de conjuntos encontró en la aritmética cardinal y la teoría descriptiva de los reales sus principales corrientes directrices. Ya en 1878 Cantor propone su famosa *hipótesis del continuo*:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1, \tag{CH}$$

básicamente como consecuencia de la aparente dificultad de definir un subconjunto de $\mathbb{R}$ de cardinalidad estríctamente entre $\aleph_0$ y $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Cantor pasó muchos años en esfuerzos fallidos para demostrar la hipótesis, estableciendo algunos casos particulares. Es notable su resultado de que todo cerrado en $\mathbb{R}$ es contable o contiene un subconjunto perfecto, y es por tanto de tamaño $\mathfrak{c}$. Los trabajos desarrollados desde entonces en análoga dirección resultaron en la teoría descriptiva de los reales, el estudio de los subconjuntos *definibles* de $\mathbb{R}$, que aun hoy es objeto de profundas investigaciones (aunque ultimamente se asume cada vez con más frecuencia, en lugar del axioma de elección la hipótesis —más fuerte en consistencia, e incompatible con elección— del axioma de determinancia).

Una generalización fue propuesta por Felix Hausdorff en 1908, en un artículo ([Ha]) que resultó piedra angular del estudio posterior de la teoría de conjuntos *per se*, y no sólo como base para los fundamentos de las matemáticas, artículo en el que introduce además el concepto de cardinal (debilmente) inaccesible; la *hipótesis generalizada del continuo*:

$$\forall\kappa\,(2^{\kappa} = \kappa^{+}). \tag{GCH}$$

GCH es una hipótesis conveniente, por cuanto simplifica en extremo la aritmética:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \text{si } \alpha \le \beta \\ \aleph_\alpha & \text{si } \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1} & \text{si } \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \le \aleph_\beta < \aleph_\alpha \end{cases}$$

(como puede deducirse facilmente del lema 2 en el capítulo 1).

No es ésta, por supuesto, su única virtud. GCH ha resultado en diversas ocasiones una hipótesis muy útil, por ejemplo, en el estudio del cálculo de particiones de Erdős y Rado (en 1965 Erdős, Hajnal y Rado practicamente resolvieron el problema bajo esta hipótesis, [ErHRa]. Para un estudio detallado sin asumir GCH, ver [ErHMáRa]), o de ultrapotencias en teoría de modelos (sobresale el teorema de Keisler sobre isomorfismo de alguna ultrapotencia de cualesquiera 2 estructuras infinitas elementalmente equivalentes, aunque posteriormente Shelah mostró que aquí GCH es prescindible, ver [ChKe]). CH, en particular, ha sido también generosamente utilizada, ver [Si]. El *axioma de Martin*, MA, formulado por Donald Martin a fines de los 60 quizás es actualmente la mejor alternativa a CH, ver [MarSo].

Sin embargo, en los 30 años que siguieron a la publicación del artículo de Hausdorff no sólo no se consiguió demostrar GCH, sino que tampoco la hipótesis más débil

$$\exists\kappa\,(2^{\kappa}=\kappa^{+}),$$

ni logró establecerse un contraejemplo.

3. Modelos Internos. L.

Para 1938 han pasado ya más de 10 años de los trabajos de Tarski en aritmética cardinal. En este año se anuncia otro artículo fundamental, el primero en tomar la teoría *axiomática* de conjuntos como disciplina matemática y objeto de estudio. Aparece 'The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis', de Kurt Gödel, en los *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 24, pgs. 556, 557, y los resultados ahí anunciados aparecen demostrados en detalle en 2 artículos que siguen a éste. En el primero de ellos Gödel asume la consistencia de un cardinal inaccesible, hipótesis que luego elimina, ver [Gö].

El trabajo de Gödel representó un gran adelanto en el estudio de la teoría de conjuntos. Desarrolló con gran éxito una idea que ya von Neumann había de algún modo utilizado (al usar la jerarquía $(\mathrm{V}_\alpha)_\alpha$ de Zermelo para establecer la consistencia del axioma de fundamentación relativa a la de los demás axiomas de ZF), la introducción de un modelo interno, L, la clase de los conjuntos construibles. En ZF, Gödel mostró que $\mathrm{L}\models \mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}$. Por tanto, de ZFC no puede obtenerse un contraejemplo a la hipótesis generalizada del continuo, a menos que ZF ya sea inconsistente. Pero no parecía muy probable que GCH pudiera llegar a demostrarse (incluso, en su concepción platónica de las matemáticas, Gödel pensaba que CH era falsa). La técnica de modelos internos se ha desarrollado vastamente, aunque en un comienzo no se podían identificar métodos de una manera clara. En su tesis de doctorado, Hajnal introdujo una generalización de la clase L, con la que logró establecer un resultado que en términos lógicos afirma que

$$\text{si}\quad \mathrm{ZFC}\vdash\neg\mathrm{CH}\quad\text{entonces}\quad \mathrm{ZFC}\vdash 2^{\aleph_0}=\aleph_2$$

(ver [K]). Esto sirvió como evidencia intuitiva para suponer que terminaría demostrándose que CH es independiente.

Un modelo interno es una clase transitiva, modelo de ZF, que contiene a ORD. Por supuesto, es una clase propia, y no puede obtenerse un conjunto que modele ZF, a no ser que sea inconsistente, por los teoremas de incompletitud de Gödel.

L es el menor modelo interno: cualquiera lo contiene. Y es absoluto: Si M es un modelo interno, $\mathrm{L}^M=\mathrm{L}$ $\big($es decir, $\forall x\,(x\in M\wedge(M\models x\in\mathrm{L})\longleftrightarrow x\in\mathrm{L})\big)$. Como $\mathrm{L}\models\mathrm{V}=\mathrm{L}$, no puede mostrarse en ZF que haya conjuntos no construibles.

4. Cardinales Grandes y Sumersiones Elementales.

Poco antes de los resultados de Cohen, a los que nos referiremos a continuación, Dana Scott involucró cardinales grandes en el panorama: En un famoso artículo de 1961, [S], mostró que V = L es incompatible con la existencia de cardinales medibles, y que el primer contraejemplo a GCH no puede ser medible. A decir verdad, excepto por el resultado de König ($\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$) y el lema de Bukovský y Hechler, éste fue el primer resultado absoluto acerca de la función exponencial ($\kappa \mapsto 2^\kappa$).

Un cardinal κ es medible sii existe una medida (bivaluada κ-completa no trivial) en $\mathcal{P}(\kappa)$. La importancia del trabajo de Scott trasciende su resultado: Scott tomó la ultrapotencia de V módulo una medida sobre κ, y consideró su colapso transitivo, M. M es un modelo interno, y la construcción produce una sumersión elemental (distinta de la identidad) $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$. Keisler mostró poco después que la existencia de una tal sumersión es de hecho equivalente a la existencia de un medible. Casi todos los cardinales grandes con que nos toparemos en esta historia fueron definidos de acuerdo con este patrón: en términos de la existenica de una sumersión elemental, con determinadas propiedades adicionales.

5. Forcing. El Problema de los Cardinales Singulares.

El siguiente gran avance en teoría de conjuntos, tanto en técnicas como en la concepción que conlleva, fue inventado por Paul Cohen, hacia 1963 ([Co]): el método de *forcing*. El forcing ha sido de inconmensurable utilidad en el establecimiento de resultados de consistencia, y en cuanto a trascendencia sólo tiene parangón con los trabajos de Gödel. El método surgió de un modo inesperado, pues no se basa en las lineas de desarrollo que se investigaban en el momento, y resultó ser de gran contenido intuitivo y suficiente flexibilidad. Cohen utilizó su método para mostrar que $\neg$AC es consistente con ZF y $\neg$CH lo es con ZFC, asumiendo que ZF es consistente. En general, cuando mencionemos resultados de consistencia, estos serán relativos a la de ZF, o de alguna de sus extensiones.

Casi enseguida a su aparición, Robert Solovay generalizó el trabajo de Cohen para mostrar que GCH puede fallar con cierta libertad:

- $2^{\aleph_0}$ puede ser cualquier κ de cofinalidad mayor que ω, y (como corolario) GCH puede fallar en cualquier número de cardinales, es decir, para cada κ es consistente con ZFC que haya al menos κ contraejemplos a GCH, κ valores de λ para los cuales $2^\lambda > \lambda^+$.
- Algo más flexible, dados finitos cardinales regulares $\kappa_0 \leq \cdots \leq \kappa_n$, y valores correspondientes $\lambda_0 \leq \cdots \leq \lambda_n$, si $\forall i \leq n\,(\kappa_i^+ \leq \lambda_i$ y $\mathrm{cf}(\lambda_i) > \kappa_i)$ entonces es consistente con ZFC que $2^{\kappa_i} = \lambda_i$, $i \leq n$.

William Easton, en su tesis de doctorado, en 1964 (ver [E]), estableció un resultado mucho más general: Sea F una función (definible) de los cardinales regulares en los cardinales tal que

i) $\forall\kappa\,(\mathrm{cf}\,F(\kappa) > \kappa)$
ii) $\forall\kappa,\lambda\,(\kappa \leq \lambda \to F(\kappa) \leq F(\lambda))$.

Entonces hay una noción de forcing $\mathbb{P}$ tal que

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \forall\kappa\,(2^\kappa = \check{F}(\kappa)).$$

$\mathbb{P}$ preserva cofinalidades (y por tanto cardinales), de modo que i) y ii) son necesarios [ii) es monotonía de la exponencial, y i) es el lema de König]. Lo asombroso es que, además, son suficientes. Esto da, por supuesto, una inmensa libertad en el comportamiento de la función exponencial (sometida sólo a restricciones dadas por resultados como el de Scott, y al hecho de que debía estar dada por una fórmula de primer orden). En cambio, el método de Easton no da absolutamente ninguna libertad al exponencial de los cardinales singulares, por cuanto SCH vale en los modelos así construidos —SCH, la *hipótesis del cardinal singular*, es la afirmación

$$\forall\kappa \,\text{singular}\,(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+ + 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}),$$

y bajo SCH conociendo la función F la exponenciación está determinada por completo—.

El problema de los cardinales singulares consiste en determinar los comportamientos consistentes de la exponencial. Por el resultado de Easton, podemos reformularlo como determinar con qué libertad puede violarse SCH. En este trabajo nos proponemos recorrer, dentro de los límites que su extensión y nuestra comprensión del tema nos imponen, el camino seguido en procura de resolver este problema.

Primero que todo, hay ciertas restricciones. Por ejemplo, si $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}\,\forall\alpha$, entonces $\beta < \omega$.

O, si $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}\,\forall n < \omega$, entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_1}$.

Durante algún tiempo se pensó que en el resultado de Easton la limitación a regulares era sólo debida a una debilidad de la prueba. Así, salvando los obstáculos del tipo de los arriba anotados, se esperaba que pudiera mostrarse que la exponencial podía ser, en esencia, arbitraria.

El artículo [Sil2] de Jack Silver, aparecido en 1974, mostró que esto no era así: Por ejemplo, si κ es singular límite fuerte, y $\mathrm{cf}\,\kappa > \omega$, κ no es el primer contraejemplo a GCH. La demostración de Silver usaba forcing y ultrapotencias, y ha sido muy simplificada desde entonces. Ver, p. ej., [BaP] o [Ku4]. ¿Acaso, entonces, es SCH un teorema? Silver practicamente había reducido el problema a singulares de cofinalidad ω. Quizás más allá del resultado de Easton realmente no había ninguno adicional.

Pero ya desde 1971, de trabajos de Prikry y Silver, [P] y [Sil1], se había establecido que si hay un medible que viole GCH, entonces es consistente que falle SCH. Un medible κ con $2^\kappa > \kappa^+$ resultó una hipótesis más fuerte de lo imaginado. Kunen [Ku2] probó, usando modelos internos y ultrapotencias iteradas, que implica la consistencia de la existencia de tantos medibles como se desee (i.e., para cada α Kunen construyó un modelo de ZFC con al menos α medibles). Pero se mostró que, módulo la existencia de cardinales supercompactos, era consistente. Un cardinal supercompacto es una generalización 'natural' de un medible, basada en la formulación con sumersiones elementales. Éstas, y los cardinales que de ellas se derivan, han sido básicos en el establecimiento de la libertad de las violaciones de SCH que se conoce hasta el momento, vía forcing.

El resultado de Silver-Prikry ocurría en un cardinal que antes de la extensión por forcing era medible, y por tanto era ahora un singular *muy* grande. Dos preguntas naturales se presentaban ahora como el siguiente objetivo: ¿Cuál es el mínimo singular en el que SCH puede fallar? y ¿Puede un singular ser el primer contraejemplo a GCH? Respecto a la segunda pregunta, cabe notar que en el modelo de Silver-Prikry, si κ es el singular que viola SCH, hay κ contraejemplos a GCH menores que él, debido al resultado de Scott, ya que el forcing no cambiaba V_κ. Si trata de reorganizarse GCH bajo κ mediante los métodos usuales de forcing, muchos cardinales menores que κ son colapsados, de modo que κ cesa de ser un contraejemplo.

6. El Lema de Cubrimiento.

Antes de ver lo ocurrido con estas preguntas, debemos destacar otro resultado, que indicó que la presencia de cardinales grandes era necesaria: En 1975 apareció un artículo que ayudó a aclarar la relación entre V y L, [DJe]. Como el resultado de Scott, dependía de la existencia o no de cierto tipo de conjuntos; en este caso, con un subconjunto de ω, $0^\sharp$.

Ronald Jensen, quien en 1972 había publicado un artículo, [Je1], donde retomaba el estudio de L, basado en las propiedades de sus etapas L_α (en realidad, en las etapas de una jerarquía diferente, J_α), y lo orientaba de manera sistemática, desarrollando lo que ahora se conoce como estructura fina, mostró en el artículo del 75 (escrito con Devlin) que si $0^\sharp$ no existía, V y L eran muy parecidos. Con más detalle, valía el *lema de cubrimiento*:

Si $X \subseteq \mathrm{ORD}$ es no contable, existe $Y \in \mathrm{L}$ tal que $X \subseteq Y \subseteq \mathrm{ORD}$ y $|X| = |Y|$. La negación de este lema es una consecuencia trivial de la existencia de $0^\sharp$ que, por supuesto, no pertenece a L, y de hecho implica que V y L son muy distintos; por ejemplo, todos los cardinales no contables, en V, son (fuertemente) inaccesibles en L. El lema de cubrimiento implica con relativa facilidad SCH, así que $\neg$SCH implica la existencia de $0^\sharp$, que es una genuina hipótesis de cardinales grandes. Es tal su significado e influencia que, por ejemplo, Kanamori lo ha denominado el resultado más importante en teoría de conjuntos en la década del 70, ver [K].

Diversas generalizaciones para modelos internos más amplios que L se han desarrollado desde entonces. Jensen mismo, y Mitchell ([Mi4,5]) han sido los directos responsables de estos resultados.

7. El Primer Contraejemplo a SCH.

Esto apoyaba la hipótesis de que alguna forma débil de SCH debía ser válida, desarrollada desde el trabajo de Silver, que pronto fue generalizado por Galvin y Hajnal pero aun restringidos a cardinales de cofinalidad $> \omega$, en un contexto puramente combinatorio, [GH]. Las desigualdades mostradas en [GH] están relacionadas con rangos asignados a funciones y filtros en estos cardinales. Un ejemplo de tales desigualdades, que no menciona estos elementos, es que si $\aleph_\lambda$ es límite fuerte de cofinalidad no contable, entonces

$$2^{\aleph_\lambda} < \aleph_{(2^{|\lambda|})^+}.$$

Esta hipótesis fue confirmada en 1974, en trabajo de Robert Solovay, [So]: Solovay estableció otro resultado absoluto, que dependía de la existencia de cardinales grandes: SCH es *eventualmente* cierta. Más específicamente, si κ es un cardinal fuertemente compacto, entonces $\forall\lambda$ singular $> \kappa\,(\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} = 2^{\mathrm{cf}\,\lambda} + \lambda^+)$. Esto, por ejemplo, implica que en presencia de cardinales fuertemente compactos $2^\kappa = \kappa^+$ para una clase propia de cardinales κ.

Magidor, en 2 artículos aparecidos casi simultaneamente en 1977, [Ma1] y [Ma2], mostró que módulo ciertos cardinales grandes —mayores que supercompactos— $\aleph_\omega$ podía contradecir SCH y, de hecho, ser el primer contraejemplo a GCH, resolviendo de forma inesperada las dos preguntas arriba planteadas. Magidor conseguía un modelo donde $\aleph_\omega$ era límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1}$, para cualquier $\alpha \leq \omega$ preestablecido.

8. Cotas en Consistencia.

El trabajo de Jensen trasciende, por mucho, lo hasta ahora indicado en relación con él: En busca de generalizaciones de L que permitieran la existencia de $0^\sharp$ o cardinales grandes mayores que los implicados por la existencia de este conjunto, y siguiendo los trabajos de Kunen [Ku1], Anthony Dodd y Ronald Jensen, en una serie de artículos aparecidos a comienzos de los 80, [DoJe1,2,3], ver también [Do1,2], introdujeron el *Core Model* K, y demostraron un análogo del lema de cubrimiento para K. Este modelo permite la existencia de cardinales medibles, pero no la requiere. Acá las técnicas de Jensen de estructura fina fueron intensamente aplicadas estableciendo, por ejemplo, que se requiere la consistencia de algo más que un medible para conseguir $\neg$SCH.

En este punto de la historia ya deben ser claras las vías en que siguieron desarrollándose los resultados: Por un lado, con forcing, se ha conseguido rebajar cada vez más las hipótesis requeridas en orden a conseguir una violación específica de SCH (en lo que sigue, nos referiremos a estas hipótesis como *cotas superiores*), y se ha establecido gran variedad de violaciones posibles. Por el otro, con la teoría de modelos internos, específicamente el trabajo con core models, se ha logrado, especialmente mediante el establecimiento de análogos al lema de cubrimiento, aumentar las hipótesis de cardinales grandes que hay que asumir para lograr la consistencia de una tal violación (en lo que sigue, nos referiremos a estas hipótesis como *cotas inferiores*).

A comienzos de esta década se logró, por ejemplo, aislar la hipótesis de cardinales grandes equiconsistente con $\neg$SCH, y desde entonces se ha establecido cuál es tal hipótesis para diversas formas de lograr los contraejemplos.

9. La teoría de pcf de Shelah.

Hay una tercera corriente que podemos mencionar ahora, y es la que se refiere a resultados absolutos, sobre todo al establecimiento de cotas para la exponenciación del tipo de las obtenidas por Hajnal y Galvin. Esta corriente corresponde a los trabajos de Shelah que desembocaron en su teoría de pcf.

Ya en el 80 Shelah obtuvo algunas cotas ([Sh2]), pero el primer resultado verdaderamente digno de mención apareció en 1982, en [Sh3]. Acá Shelah demostró, en directa analogía con [GH], que

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}.$$

Ésta, y cotas análogas para otros cardinales, se obtuvieron en medio de sus investigaciones en versiones combinatorias de teoremas que generalizasen el lema de cubrimiento. Fue la primera cota conseguida para la exponenciación de cardinales de cofinalidad ω, contradiciendo la que ahora se iba estableciendo como la hipótesis dominante, a saber: que no existían tales cotas.

La demostración de Shelah usaba fuertemente algunas ideas que había introducido previamente en el contexto de álgebras de Jónsson, referentes a la cofinalidad de ultraproductos. Shelah encaminó su trabajo entonces en esta dirección, y a fines de los 80 había desarrollado la rica teoría de pcf cuyos frutos muestra en [Sh8], ver también [BuMa].

pcf es una abreviatura de '*p*ossible *cof*inalities', y la teoría investiga las relaciones estructurales entre conjuntos de cardinales (regulares) y las cofinalidades de sus ultraproductos. Es una teoría muy fértil, y en manos de Shelah ha encontrado aplicaciones muy diversas. Es notoria por la inherente sencillez de sus argumentos, y su profundidad. La teoría ha hallado uso en la investigación de la existencia de cardinales de Jónsson, en el estudio de lenguajes infinitarios, en diversos problemas de álgebra, en aritmética cardinal, etc. Ver [Sh7].

Respecto a sus aplicaciones en aritmética, una de las principales es el establecimiento de la cota

$$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \longrightarrow \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4},$$

además de resultados como que si $\aleph_\omega$ es límite fuerte entonces $2^{\aleph_\omega}$ es regular, lo que en particular implica que no puede ser $\aleph_{\omega_1}$, siendo así un resultado mucho más fuerte que uno de los que previamente hemos mencionado.

La teoría ha recibido también bastante atención por parte de otros conjuntistas interesados en SCH, y oportunamente mencionaremos algunas de sus aplicaciones no debidas a Shelah.

10. Core Models.

Regresemos un poco, y examinemos ahora los resultados en teoría de core models.

El estado actual de la teoría en gran medida se debe a William Mitchell. Sus trabajos extienden los de Dodd y Jensen, quienes habían introducido el modelo K (una restricción de la clase $L[\mathcal{U}]$ de Kunen, donde puede habitar un medible, pero no necesariamente mucho más). Los resultados con ultrapotencias obtenidos hasta entonces dependían en cierto grado de una propiedad de los conjuntos medibles: la existencia de una medida normal, esto es, si κ es medible, un ultrafiltro sobre κ, no principal, κ-completo y cerrado bajo intersecciones *diagonales* de tamaño κ. Es fácil caracterizar κ en el ultraproducto módulo una medida normal: κ es el primer ordinal que la sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$, donde M es el colapso transitivo del ultraproducto, mueve (tal ordinal es llamado el *punto crítico* de j). Cuando la medida es normal, κ es la imagen de la identidad $\mathrm{id}_\kappa : \kappa \to \kappa$ bajo tal ultraproducto.

Como hemos notado, las sumersiones han estado presentes en esta historia desde hace bastante: $0^\sharp$ existe sii hay una sumersión elemental (no trivial) $\pi : L \xrightarrow{\prec} L$. La existencia de los conjuntos análogos $0^{\sharp\sharp}$, $0^{\sharp\sharp\sharp}$, etc, puede caracterizarse similarmente en términos de la existencia de sumersiones elementales $\pi : L[0^\sharp] \xrightarrow{\prec} L[0^\sharp]$, $\pi : L[0^{\sharp\sharp}] \xrightarrow{\prec} L[0^{\sharp\sharp}]$, etc. Y puede conseguirse una sucesión *muy* larga —que va "más allá", incluso, de ORD— de $0^{(\alpha)\sharp}$. Los miembros de tal sucesión son conocidos en este contexto como *ratones*. Admitiendo todos estos ratones se obtiene K, y puede irse más allá, de nuevo, mirando sumersiones $\pi : K \xrightarrow{\prec} K$.

Mitchell introdujo la idea de trabajar no con un medible κ y una medida sobre κ, sino con sucesiones de estas medidas. Para esto, comenzó definiendo un orden o en la familia de medidas normales sobre κ, que lleva a toda una jerarquía de cardinales grandes, según el tamaño de $o(\kappa) = \{\, o(U) : U$ es medida normal sobre $\kappa \,\}$. Acá, $o(U) = \{\, o(U') : U' \lhd U \,\}$, donde $U \lhd U'$ sii U pertenece al colapso de la ultrapotencia de V módulo U'. Este orden resulta ser bien fundamentado, de modo que o está bien definido, y es un ordinal. De hecho, $o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$. Las medidas codifican sumersiones, y Mitchell decidió no trabajar directamente con éstas, sino con aproximaciones. Los detalles de cómo 'aproximar', presentes ya en [Mi1,3], fueron simplificados por Jensen, desarrollando el concepto de *extender*.

Mitchell construyó un modelo $K[\mathcal{F}]$ que es una extensión de K por medio de una sucesión de extenders $\mathcal{F}$. En las presentaciones modernas, gracias a las simplificaciones, este modelo puede escribirse en la forma $L[\vec{E}]$. En caso de que haya un medible, $K = \bigcap_\alpha L[\mathcal{U}_\alpha]$, donde $L[\mathcal{U}_0]$ es el modelo de [Ku1] y los $L[\mathcal{U}_\alpha]$ son sus ultrapotencias iteradas. Por eso, ahora se acostumbra llamar K al modelo $L[\vec{E}]$ que esté en consideración. $\vec{E}$ es una sucesión *coherente* de extenders, y $L[\mathcal{U}]$ es de la forma $L[\vec{E}]$ para una $\vec{E}$ de longitud 1. La sucesión $\vec{E}$ es coherente, básicamente, si sus elementos están listados $\lhd$-ordenados, sin dejar huecos. En [Mi2] se generaliza la definición de o, de modo que ahora pueden tenerse cardinales κ con $o(\kappa) > (2^\kappa)^+$. Por ejemplo, un cardinal fuerte es uno para el cual $o(\kappa) = \infty$.

Así como $L = \bigcup_\alpha J_\alpha$, y la relación entre los J_α (que están linealmente ordenados por contenencia) es básica en la estructura fina de L, la relación entre las etapas que conforman K, también llamadas ratones, es primordial en la teoría de core models. (En nuestra formulación inicial los ratones codifican el modelo interno. Acá, consideramos tal modelo directamente). Agregando extenders a la sucesión $\vec{E}$ de que se parta pueden obtenerse ratones cada vez 'mayores'. Esta relación está ahora dada en términos de un orden $<^*$. Simplificando un poco, para ratones M y N decimos que $M \leq^* N$ sii hay ratones P y Q y sumersiones i, j con $i : M \xrightarrow{\preceq} P$ y $j : N \xrightarrow{\preceq} Q$ t.q. $P \subseteq Q$ (Ver [MarSt2]). A medida que se sube (en el orden o) en la sucesión $\vec{E}$ la comparación se hace más difícil. Los modelos estudiados por Mitchell son *linealmente iterables*, de modo que dado un ratón M_0 puede construirse una sucesión $(M_\alpha)_\alpha$ de ultrapotencias iteradas, con todos los M_α bien fundamentados. Si M_0, N_0 son linealmente iterables y, digamos, a lo más hay cardinales fuertes, eventualmente la sucesión coherente de M_α será segmento inicial de la de N_α y tendremos $M_0 \leq^* N_0$, o viceversa. Los detalles se complican a medida que subimos en la jerarquía de cardinales grandes y si admitimos, p. ej., varios cardinales de Woodin, puede haber ratones que no sean linealmente iterables, lo que ha obligado a procesos de comparación más intrincados, y dado origen a la teoría de *árboles de iteración*, expuesta en [MarSt1,2].

La 'motivación' en la teoría de core models es que si κ es un cardinal grande, digamos de tipo P, una sucesión $\vec{E}$ lo refleja, y en $L[\vec{E}]$ κ aun es un cardinal de tipo P. $L[\vec{E}]$ es 'bien comportado' y posee una 'aceptable' estructura fina. Del estudio de ésta se pueden deducir propiedades sobre V que dependen de la presencia o no de cardinales de tipo P, y esto permite establecer las cotas inferiores para los diferentes casos de, por ejemplo, $\neg$SCH. Otra de sus principales aplicaciones tiene que ver con teoría descriptiva (ver [MarSt1]), aunque aquí no trataremos esto.

Hasta ahora, la teoría se conoce con cierto detalle hasta cardinales de Woodin ([MiSt], [St]), y en las etapas *bajas* aun más:

En el modelo original de Mitchell, $\lhd$ es un buen orden en la familia de medidas normales sobre κ, pero ahí vale GCH, así que $o(\kappa) \leq \kappa^{++}$. Moti Gitik, en trabajo a fines de la década pasada y comienzos de ésta, y usando resultados de la teoría de pcf de Shelah, mostró ([Gi2,3]) que la consistencia de $\neg$SCH es justo la de $\exists\kappa\,(o(\kappa) = \kappa^{++})$. Esta hipótesis ha sido cuidadosamente estudiada por Mitchell de modo que, p. ej., actualmente se conoce con cierta claridad cómo es V en caso de que $\neg\exists\kappa\,(o(\kappa) = \kappa^{++})$. Ver [Mi6,8,10], donde se ven aplicaciones a combinatoria infinita, SCH, y generalizaciones de resultados de Jensen sobre fórmulas absolutas para K y V.

Se ignora qué tanto más pueden extenderse las construcciones, de modo que lleguen a conseguirse core models que acojan al menos un supercompacto. Se sabe con certeza, gracias a trabajos de Woodin sobre ideas de Shelah, Foreman y Magidor [FMaSh1], que esto requiere cambiar las técnicas y el tipo de resultados obtenidos hasta ahora. Ya han habido cambios muy significativos desde [DoJe1], e incluso desde los primeros trabajos de Mitchell mismo.

Los últimos resultados en la teoría se deben a Mitchell, Steel, Martin, Gitik y Koepke ([Ko]). En parte los detalles se han trabajado en teoría de segundo y tercer orden, y para la fecha no resulta claro que los métodos (o los mismos resultados) sean formalizables del todo en ZFC, o en MK (Morse-Kelley), donde fundamentación vale para clases, y quizás sea el marco natural para los estudios modernos en core models y cardinales grandes. Pero se han obtenido cotas inferiores muy precisas para fallas de SCH o resultados afines. Por ejemplo, se sabe que la consistencia de

$$2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega_1} \quad \text{y} \quad 2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$$

es al menos la de un cardinal fuerte (de hecho, algo más), resultado en el que también se apeló a la teoría de pcf; y

$$\exists \kappa, \alpha\, (\mathrm{cf}(\alpha) > \kappa, 2^\kappa = \kappa^{+\alpha} \text{ y } \kappa \text{ es medible})$$

es equiconsistente con

$$\exists \kappa, \alpha\, (\mathrm{cf}(\alpha) > \kappa, o(\kappa) = \kappa^{+\alpha}).$$

Más precisamente, si κ, α son como arriba, puede hallarse un modelo interno donde $o(\kappa) = \kappa^{+\alpha}$. Y, si se tiene la situación de abajo, por forcing, sin colapsar cardinales, puede conseguirse $2^\kappa = \kappa^{+\alpha}$, y κ aun medible. Ver [GiMi], [Gi4], [GiMa2].

11. Forcing; Resultados Adicionales.

Mencionemos, finalmente, en qué consisten los resultados conseguidos con forcing desde los trabajos de Magidor.

Shelah [Sh5] mostró que $\forall \alpha < \omega_1$ —asumiendo la consistencia de un supercompacto— es consistente que

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+\alpha+1}, \quad \text{con} \quad 2^{\aleph_0} < \aleph_\omega,$$

y Magidor mismo adaptó luego esta prueba para que, además, GCH valiera bajo $\aleph_\omega$. Aun no se sabe si $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_{\omega_1}$, $\aleph_\omega$ límite fuerte, es consistente, pero alguna idea nueva es necesaria si se desea establecer un resultado de este estilo.

Shelah también mostró resultados similares para cardinales de cofinalidad $> \omega$. Sus cotas en consistencia, sin embargo, parecen excesivamente grandes en comparación con las inferiores (y al menos para el resultado en $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ lo son. Ver [GiMa1]). Gran parte de los resultados han consistido en rebajar las cotas superiores para, por ejemplo, $2^\kappa > \kappa^+$, κ medible, lo que asegura un modelo de $\neg$SCH.

Hugh Woodin, uno de los mejores conjuntistas de los últimos años, ha sido el responsable de la mayor parte de los avances en esta dirección, especialmente con sus trabajos del 83 y 84. Gracias a sus técnicas, pudo establecerse que los cardinales hipermedibles, introducidos en [Mi2], bastan en la mayoría de los resultados, lo que es importante pues estos son bastante menores que los supercompactos, y las técnicas de modelos internos les son accesibles. Woodin ha publicado pocos de sus trabajos, lo que dificulta encontrarlos; se espera que pronto aparezca un libro escrito en coautoría con James Cummings, donde los va a mostrar. Estos son principalmente aplicaciones del forcing de Radin, y han permitido establecer varios resultados globales, como los que mencionaremos en un momento.

Entre el 90 y 92, Gitik y Magidor desarrollaron nuevas técnicas de forcing, donde utilizaban extenders para producir lo que denominaron sucesiones *precisas* de ultrafiltros (nice systems), con las que definían una noción de forcing mediante la cual es posible simultaneamente hacer 2^κ grande y κ singular, comenzando con un medible κ (apropiado), y no en 2 pasos, como se hacía hasta entonces. Esto ha permitido rebajar en varias ocasiones las cotas, como en la consistencia de

$$\forall n < \omega\, (2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}) \wedge 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1},$$

para $\alpha \in \omega_1$ dado, a partir de cardinales 'suficientemente' fuertes, lo que es una disminución considerable de los cardinales con que se tenía el resultado, y establecer otras, incluso la equiconsistencia mencionada arriba (una dirección es debida a Woodin).

En 1979, siendo aun estudiantes, Woodin y Matthew Foreman [FWo] establecieron que (si hay un supercompacto con ω inaccesibles mayores que él, entonces) es consistente que $\forall\kappa\, (2^\kappa > \kappa^+)$, así que SCH puede fallar de una forma extremadamente dramática. Woodin, desde entonces, ha rebajado la hipótesis a la existencia de un $\mathcal{P}_2(\kappa)$-hipermedible (es decir, un κ t.q. hay una sumersión $j : \mathrm{V} \to M$ con punto crítico κ, ${}^\kappa M \subseteq M$, $\mathrm{V}_{\kappa+2} \subseteq M$), y ha conseguido establecer, más aun, la consistencia de

$$\forall\kappa\, (2^\kappa = \kappa^{++}).$$

La tesis doctoral de Cummings, escrita en el 88 bajo la supervisión de Adrian Mathias y Woodin, traía otro resultado de este tipo: Comenzando con GCH y un $\mathcal{P}_3(\kappa)$-hipermedible, puede conseguirse un modelo ([Cu1]) donde GCH falle en κ sii κ es límite.

Estos resultados son análogos en cuanto a la naturaleza del modelo construido: En ambos casos es de la forma $\mathrm{V}^*_\kappa = (\mathrm{V}_\kappa)^{\mathrm{V}^*}$, donde V^* es una extensión genérica de V, y κ es el cardinal hipermedible. En V^*_κ hay montones de cardinales grandes, pero no *muy* grandes, por el resultado de Solovay.

Y esto resume aproximadamente lo que se conoce con respecto al problema de los cardinales singulares hasta la fecha. *No* es claro qué tipos de comportamientos globales son válidos (p. ej., ¿La siguiente afirmación será consistente $\forall n < \omega$?:

$$\forall\kappa\, (2^\kappa = \kappa^{+n})\ ),$$

ni en qué cardinales singulares hay cotas para la exponencial (p. ej., comenzando con GCH y un cardinal fuerte κ, en [GiMa1] se construye un modelo donde κ es ahora singular, de cofinalidad ω, y $2^\kappa \geq \lambda$. Acá, λ es cualquier cardinal preestablecido).

Hay varias preguntas similares que es necesario resolver para tener una respuesta completa al problema.

Capítulo 0

Preliminares: Cardinales Grandes, Forcing y L

El que quiere ensanchar la esfera de la moral debe cuidar que los resultados no puedan ser sometidos a comprobación.

(Friedrich Nietzsche, *Aurora*, (1886).)

1. Notación.

a) Nuestra teoría básica es ZFC (Zermelo-Fraenkel con elección), de modo que todo cardinal infinito es un aleph. Como ZFC no admite variables para clases, éstas deben verse como abreviaturas informales para fórmulas de primer orden en el lenguaje cuyo único símbolo no lógico es $\in$, $\mathcal{L}_\in$. Esto puede representar algunos problemas, pues a lo largo del trabajo usualmente tendremos que vérnoslas con clases propias que son modelos de ZFC, y con sumersiones elementales entre ellas. Hay varios métodos estándar de enfrentar estas dificultades, y llegado el momento les haremos frente.

No es automático que la manipulación informal de clases pueda formalizarse en primer orden, quizás mediante esquemas: ZFC es suficiente para los resultados que trabajaremos aquí, pero (como se anotó en la introducción) en la teoría de core models ultimamente ha sido necesario recurrir a argumentos en lógica de segundo e incluso tercer orden, y aun no es claro cómo formalizarlos.

Con(φ) es la afirmación de que φ es consistente (de hecho, que $T \cup \{\varphi\}$ lo es, donde T es la teoría en consideración —ZFC o una de sus extensiones por cardinales grandes—). Ésta es una afirmación metamatemática, pero puede formalizarse dentro de la teoría.

b) Las letras griegas minúsculas denotarán ordinales. Usualmente κ, λ, μ, ρ serán cardinales (infinitos a menos que se especifique algo distinto), pero cuáles denotan cardinales, o incluso ordinales límite, dependerá en general del contexto. n, m representan naturales.

c) ORD denota la clase de los ordinales, $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{ORD}}$ es la enumeración creciente de los cardinales infinitos, $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$, $\omega = \omega_0$. $\mathrm{cf}\,\alpha$ es la cofinalidad de α y $|\alpha|$ su cardinalidad. κ es regular sii $\mathrm{cf}\,\kappa = \kappa$, y singular en otro caso. Un cardinal κ es límite fuerte si $\rho < \kappa \to 2^\rho < \kappa$. $\kappa^{<\lambda} = \mathrm{Sup}_{\rho<\lambda}\kappa^\rho$. $(\beth_\alpha)_\alpha$ es la sucesión de los beths: $\beth_0(\kappa) = \kappa$, $\beth_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{\beth_\alpha(\kappa)}$, $\beth_\lambda(\kappa) = \mathrm{Sup}_{\alpha<\lambda}\beth_\alpha(\kappa)$ si λ es límite; $\beth_\alpha = \beth_\alpha(\omega)$. $\kappa^{+\alpha}$ es el α-ésimo cardinal sucesor de κ: Si $\kappa = \aleph_\beta$, entonces $\kappa^{+\alpha} = \aleph_{\beta+\alpha}$. $\kappa^+ = \kappa^{+1}$. La función exponencial es $\kappa \mapsto 2^\kappa$, aunque al hablar de exponenciación, en general, no nos restringimos necesariamente a ésta.

$[X]^\lambda = \{Y \subseteq X : |Y| = \lambda\}$; si f es una función, y $X \subseteq \mathrm{Dom}\,f$, $f``X = \{f(y) : y \in X\}$. Si, trabajando con sucesiones de cardinales $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mu}$ tenemos que referirnos a su producto cartesiano, lo notaremos $\dot{\prod}_{\alpha\in\mu}\kappa_\alpha$, y no como para sucesiones $(A_\alpha)_\alpha$ de conjuntos en general, donde será simplemente $\prod_{\alpha \in \mu} A_\alpha$. Con cardinales, reservamos esta notación para su producto aritmético. Así, $\prod_\alpha \kappa_\alpha = |\dot{\prod}_\alpha \kappa_\alpha|$.

De la demostración del Teorema 1 debe ser claro qué se asume conocido de la aritmética cardinal elemental. En diversas ocasiones nos valdremos de los resultados ahí mostrados.

d) $(\mathrm{V}_\alpha)_\alpha$ es la jerarquía conjuntista usual de potencias iteradas, $\mathrm{V} = \bigcup_\alpha \mathrm{V}_\alpha$ es el universo conjuntista. Si x es un conjunto, $\mathrm{rank}(x)$, el rango de x, denota el mínimo α t.q. $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$.

$\mathrm{id} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ es la función identidad (una clase propia). Si S es una clase, $\mathrm{id}_S = \mathrm{id} \restriction_S$.

Jerarquías como $(\mathrm{L}_\alpha)_\alpha$, $(J_\alpha)_\alpha$ o $(\mathrm{L}_\alpha[A])_\alpha$ serán introducidas oportunamente.

e) En forcing seguiremos la notación de [Ku5]. En particular, $p \leq q$ significa que p extiende a q. $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, etc., denotarán las nociones de forcing, usualmente con subíndices. **1** será el elemento maximal del orden en consideración, y en caso de posible confusión lo subindicaremos, así como a la relación de orden propiamente dicha, $\leq$. Más adelante daremos una lista más detallada de las convenciones y notación que usaremos.

f) Para los conceptos y notación de teoría de modelos referimos a [ChKe]. Como es usual, a menos que se explicite otra cosa, notaremos el universo de una estructura con la misma letra que a la estructura, a veces en otro estilo (p. ej., $\mathcal{M} = \langle M, (R_\alpha)_{\alpha \in I} \rangle$); deberá ser claro del contexto si hacemos referencia a la estructura o a su universo.

Las estructuras conjuntistas se supondrán dotadas de una relación ϵ que siempre interpretaremos como $\in$ cuando sean transitivas.

g) Indicaremos el fin de las demostraciones mediante un cuadrado blanco: $\Box$. También usaremos este símbolo luego del enunciado, si su prueba va a omitirse. Como usualmente las demostraciones se partirán en una serie de lemas, para facilitar la orientación subindicaremos los cuadrados, indicando entre paréntesis el resultado al que corresponden. "Sii" significa si y sólo si, "s.p.d.g." es sin pérdida de generalidad, y "t.q." es tal(es) que.

Iremos introduciendo más convenciones y notación, según las vayamos necesitando. En general, serán estándar, y [J1] y [Ku5] deberían bastar en caso de duda respecto a la definición específica que se esté usando en cada caso.

2. Resultados Básicos. Desigualdades Elementales.

El siguiente teorema puede verse como motivación para lo que sigue. Algunos de los resultados ahí mostrados no serán usados más adelante.

Teorema 1. *Sea SCH la afirmación:*

$$\forall \kappa \textit{ singular} (\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+ + 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}).$$

Nótese que la igualdad se cumple trivialmente si κ es regular.

Suponga SCH. Entonces

a) *Si κ es singular,*

$$2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \textit{si la función exponencial es eventualmente constante bajo } \kappa \\ (2^{<\kappa})^+ & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

b) *Si κ, λ son infinitos, entonces*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda & si\ 2^\lambda \geq \kappa \\ \kappa & si\ 2^\lambda < \kappa \ y\ \lambda < \mathrm{cf}\,\kappa \\ \kappa^+ & si\ 2^\lambda < \kappa\ y\ \lambda \geq \mathrm{cf}\,\kappa. \end{cases}$$

c) *[Conjetura de Tarski, Ta] $\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_\alpha^{|\beta|}$ para todo ordinal (límite) β y toda sucesión $\{\sigma_\xi\}_{\xi<\beta}$ creciente y con límite α.*

En la demostración probaremos un tanto más de lo enunciado.

Dem: a) Comencemos con un resultado que no requiere de hipótesis adicionales.

Lema 1.

a) *Si κ es infinito, entonces $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa}$. En particular, si κ es límite fuerte, $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$.*

b) *[Bukovský-Hechler (Independientemente)] Si κ es singular y la exponencial es eventualmente constante bajo κ, entonces $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.*

Dem:

a) Sea $\mu = \mathrm{cf}\,\kappa$, $\kappa = \sum_{\alpha<\mu} \kappa_\alpha$, $\kappa_\alpha < \kappa$ para todo α. Entonces

$$2^\kappa = 2^{\sum_\alpha \kappa_\alpha} = \prod_\alpha 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_\alpha 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^\mu.$$

La otra desigualdad es clara.

b) Supongamos ahora que κ es singular. Si la función exponencial ($\mu \mapsto 2^\mu$) es eventualmente constante debajo de κ, entonces existe κ_0, $\mathrm{cf}\,\kappa < \kappa_0 < \kappa$, t.q.

$$2^{<\kappa} = 2^{\kappa_0}.$$

Entonces $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa} = (2^{\kappa_0})^{\mathrm{cf}\,\kappa} = 2^{\kappa_0} = 2^{<\kappa}$. $\square_{(\mathrm{L1})}$

Asumamos SCH.

Sea κ singular. Por lo demostrado en el lema, podemos suponer que la exponencial no es eventualmente cte. bajo κ y, escribiendo κ como suma de cardinales κ_α, como arriba, podemos suponer que $\alpha < \beta (< \mathrm{cf}\,\kappa)$ implica $2^{\kappa_\alpha} < 2^{\kappa_\beta}$ y, como antes, $2^{\mathrm{cf}\,\kappa} \leq 2^{\kappa_0}$. Nótese que $2^{<\kappa} = \mathrm{Sup}_{\alpha<\mathrm{cf}\,\kappa} 2^{\kappa_\alpha}$ tiene cofinalidad $\mathrm{cf}\,\kappa$. Entonces

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = 2^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} + (2^{<k})^+ = 2^{\mathrm{cf}\,\kappa} + (2^{<\kappa})^+ = (2^{<\kappa})^+,$$

donde la tercera igualdad es por SCH.

Corolario 1. *SCH implica que si κ es singular límite fuerte, entonces* $2^\kappa = \kappa^+$. $\square_{(C1)}$

b) Para κ, λ cardinales, llamemos $(<\kappa)^\lambda$ a $\operatorname{Sup}_{\rho<\kappa} \rho^\lambda$.

Lema 2. *Si κ, λ son infinitos entonces*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda & \text{si } \kappa \le 2^\lambda \\ \kappa \cdot (<\kappa)^\lambda & \text{si } \lambda < \operatorname{cf}\kappa \\ (<\kappa)^\lambda & \text{si } \operatorname{cf}\kappa \le \lambda < 2^\lambda < \kappa \text{ y } \rho^\lambda \text{ es eventualmente cte. bajo } \kappa. \\ \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dem: Si $\kappa \le 2^\lambda$, entonces

$$2^\lambda \le \kappa^\lambda \le (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda.$$

Si $\lambda < \operatorname{cf}\kappa$, entonces

$$\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa| = |\{ f : f : \lambda \to \kappa \}| = \Big|\bigcup_{\xi<\kappa} \{ f : f : \lambda \to \xi \}\Big|$$
$$\le \sum_\xi |\xi|^\lambda = \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\rho<\kappa} \rho^\lambda = \kappa \cdot (<\kappa)^\lambda \le \kappa^\lambda.$$

Supongamos, pues, que $\mu = \operatorname{cf}\kappa \le \lambda < 2^\lambda < \kappa$.

Afirmación. *Sean κ, μ cardinales, $\kappa = \operatorname{Sup}_{\alpha<\mu} \kappa_\alpha$, los κ_α crecientes. Entonces*

$$\kappa^\mu = \prod_\alpha \kappa_\alpha.$$

Dem: Para la desigualdad no trivial basta escribir μ como unión de μ conjuntos disyuntos A_α, $\alpha < \mu$, de tamaño μ. Nótese que, por tener tal tamaño, cada uno es cofinal en μ.

Entonces

$$\prod_{\beta<\mu} \kappa_\beta = \prod_{\alpha<\mu} \prod_{\beta\in A_\alpha} \kappa_\beta \ge \prod_{\alpha<\mu} \operatorname*{Sup}_\beta \kappa_\beta$$
$$= \kappa^\mu. \quad \square_{(Af)}$$

Sea $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mu}$ como en la afirmación.

Entonces $\kappa^\lambda = \kappa^{\mu\lambda} = \left(\prod \kappa_\alpha\right)^\lambda = \prod \kappa_\alpha^\lambda$.

Si hay un $\rho < \kappa$ t.q. $(<\kappa)^\lambda = \rho^\lambda$, s.p.d.g. $\rho < \kappa_0$, y $\kappa^\lambda = \prod \kappa_\alpha^\lambda = \prod \rho^\lambda = \rho^{\lambda\cdot\mu} = \rho^\lambda = (<\kappa)^\lambda$.

En otro caso, s.p.d.g. $\kappa_\alpha^\lambda < \kappa_\beta^\lambda$ para $\alpha < \beta(<\mu)$. Entonces, de la afirmación,

$$\kappa^\lambda = \prod \kappa_\alpha^\lambda = \left[(<\kappa)^\lambda\right]^{\operatorname{cf}(<\kappa)^\lambda}.$$

Ahora bien: Si $\rho < \kappa$ y $\rho^\lambda \ge \kappa$ entonces $\kappa^\lambda = \rho^\lambda$. En este caso, esto claramente es imposible, así que $\forall\rho < \kappa\,(\rho^\lambda < \kappa)$. Luego, $(<\kappa)^\lambda = \kappa$. $\square_{(L2)}$

Corolario 2. *[Hausdorff]* $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$. $\square_{(C2)}$

Asumamos SCH.

Procedamos por inducción en κ: Como antes, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ si $\kappa \leq 2^\lambda$.

Si $2^\lambda < \kappa$ y $\lambda < \operatorname{cf}\kappa$,

$$\begin{aligned}\kappa^\lambda = \kappa(<\kappa)^\lambda = \kappa \operatorname*{Sup}_{\rho<\kappa} \rho^\lambda = \kappa \operatorname*{Sup}_{2^\lambda \leq \rho < \kappa} \rho^\lambda \\ \leq \kappa \operatorname*{Sup}_{2^\lambda \leq \rho < \kappa} \rho^+ = \kappa,\end{aligned}$$

la desigualdad por hipótesis de inducción.

Finalmente, supongamos que $2^\lambda < \kappa$ y $\operatorname{cf}\kappa \leq \lambda$. En particular, κ es límite. Si ρ^λ es eventualmente cte. bajo κ, como $2^\lambda < \kappa$, si $\rho < \kappa$ es *suficientemente* grande, entonces $2^\lambda < \rho$ y $\kappa^\lambda = (<\kappa)^\lambda = \rho^\lambda$ y, por SCH, $\kappa^\lambda \leq \rho^+ < \kappa \leq \kappa^\lambda$, una contradicción.

Luego, ρ^λ *no* es eventualmente cte. bajo κ, y

$$\kappa^\lambda = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} = \kappa^+ + 2^{\operatorname{cf}\kappa} = \kappa^+.$$

Corolario 3. *SCH* $\longleftrightarrow \forall\kappa, \lambda\,(\kappa^\lambda \leq 2^\lambda + \kappa^+)$. $\square_{(C3)}$

c) Es claro que, cúmplase o no la conjetura, siempre el lado izquierdo es menor o igual que el derecho. Nótese que (en la Afirmación) demostramos, sin hipótesis adicionales, la conjetura de Tarski para el caso en que β fuera un cardinal. De hecho, para el caso en que β tenga $|\beta|$ subconjuntos disyuntos cofinales. Por tanto, el primer β para el cual hay un contraejemplo a la conjetura, si existe, es $\geq \omega_1 + \omega$.

Hay otro caso en el que vale:

- $\prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta^{|\beta|}$ *para todo β límite.*

Dem: Sea $\kappa = |\beta|$, $\beta = \kappa + \alpha$. Procedamos por inducción en α. Si $\alpha = 0$ ya está. Supongamos que el resultado vale para (0 y) todos los límites menores que α.

Sea $\gamma = \operatorname{cf}\alpha (= \operatorname{cf}\beta = \operatorname{cf}\aleph_\beta)$, $\alpha = \operatorname{Sup}_{\delta\in\gamma} \alpha_\delta$, $(\alpha_\delta)_\delta$ creciente.

Hay 2 casos: 1) α *no* es límite de ordinales límite. Entonces $\gamma = \omega$, $\alpha = \lambda + \omega$, con λ límite (o 0), y podemos tomar $\alpha_\delta = \lambda + \delta$, $\delta \in \omega$.

Entonces

$$\begin{aligned}\aleph_\beta^{|\beta|} = \aleph_{\kappa+\alpha}^{\gamma\kappa} &= \Big(\prod_{\delta\in\gamma} \aleph_{\kappa+\alpha_\delta}\Big)^\kappa \\ &= \prod_{\delta\in\omega} \aleph_{\kappa+\lambda+\delta}^\kappa = \prod_{\delta\in\omega} \aleph_{\kappa+\lambda}^\kappa \aleph_{\kappa+\lambda+\delta}, && \text{por el corolario 2,} \\ &= \aleph_{\kappa+\lambda}^\kappa \prod_{\delta\in\omega} \aleph_{\kappa+\lambda+\delta} = \prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi, && \text{por hipótesis de inducción.}\end{aligned}$$

2) α es límite de ordinales límite. Entonces, s.p.d.g. α_δ es límite para todo δ.

Si $\aleph_\beta \leq 2^\kappa$ entonces $\aleph_\beta^{|\beta|} = 2^{|\beta|}$ y $2^{|\beta|} \leq \prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi \leq \aleph_\beta^{|\beta|}$.

Como $\kappa \geq \gamma$ podemos entonces suponer que $2^\kappa < \aleph_\beta$, y estamos en la tercera o cuarta situación del Lema 2.

Si ρ^κ es eventualmente cte. bajo $\aleph_{\kappa+\alpha}$,

$$\begin{aligned}\aleph_{\kappa+\alpha}^\kappa = (<\aleph_{\kappa+\alpha})^\kappa &= \operatorname*{Sup}_{\delta<\gamma} \aleph_{\kappa+\alpha_\delta}^\kappa \\ &= \operatorname*{Sup}_{\delta<\gamma} \prod_{\xi<\kappa+\alpha_\delta} \aleph_\xi, \quad \text{por hipótesis de inducción,} \\ &\leq \prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi \leq \aleph_\beta^{|\beta|}.\end{aligned}$$

Por tanto, podemos asumir que $\aleph_{\kappa+\alpha}^\kappa = \aleph_{\kappa+\alpha}^{\mathrm{cf}(\kappa+\alpha)} = \aleph_{\kappa+\alpha}^\gamma$. Entonces

$$\aleph_\beta^{|\beta|} \geq \prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi \geq \prod_{\delta\in\gamma} \aleph_{\kappa+\alpha_\delta} = \aleph_{\kappa+\alpha}^\gamma. \ \square_{(\bullet)}$$

La conjetura de Tarski resulta de este modo, al menos en apariencia, muy natural. Pero no es un teorema. Sin embargo, como se deduce de SCH (como nos proponemos mostrar), en el curso del trabajo mostraremos que su negación implica la existencia de cardinales grandes, y por tanto no puede probarse consistente con ZFC.

En [JSh1] se demuestra que si hay un contraejemplo, entonces hay uno con $\beta = \omega_1 + \omega$ —el mínimo posible—. Seguiremos [JSh1] en nuestra demostración de que SCH $\longrightarrow$ c). De hecho, mostraremos algo más: Si la conjetura de Tarski falla, podemos hallar un γ con $\gamma > \mathrm{cf}\,\gamma = \kappa > \omega$, tal que

$$\forall\delta<\gamma\,(\aleph_\delta^\kappa < \aleph_\gamma), \quad \text{y}$$
$$\aleph_\gamma^\kappa > \aleph_{\gamma+\omega}^\omega.$$

Esto obviamente contradice SCH. A partir de ahora, supongamos que la conjetura de Tarski es falsa. Sea β el mínimo ordinal para el que hay un contraejemplo, y sea $\{\sigma_\xi\}_{\xi<\beta}$ testiga de esto, es decir,

$$\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} < \aleph_\alpha^\kappa. \quad \alpha = \lim_\xi \sigma_\xi, \quad \kappa = |\beta|. \tag{$*$}$$

Lo primero a notar es que, s.p.d.g., $\{\sigma_\xi\}_\xi$ puede suponerse continua, pues puede redefinirse en los límites, sin alterar el cardinal del producto en $(*)$, ni el límite de la sucesión.

Lema 3. *Si β, α, κ son como arriba, entonces $\beta = \kappa + \omega$, κ es no contable, y $\exists\gamma < \alpha\,(\aleph_\gamma^\kappa > \aleph_\alpha)$.*

Dem: Por $(*)$, β no tiene $|\beta| = \kappa$ subconjuntos disyuntos cofinales. Entonces $\mathrm{cf}\,\beta < \kappa < \beta$.

Si $\aleph_\gamma^\kappa \leq \aleph_\alpha\,\forall\gamma<\alpha$, sea $\{\alpha_\delta\}_{\delta\in\mathrm{cf}\,\beta}$ una subsucesión cofinal de $\{\sigma_\xi\}_\xi$. Entonces $\aleph_\alpha^\kappa = \prod_\delta \aleph_{\alpha_\delta}^\kappa \leq \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\,\beta} = \prod_\delta \aleph_{\alpha_\delta} \leq \prod_\xi \aleph_{\sigma_\xi}$, lo que contradice $(*)$.

Sea $\eta < \beta$ límite. Si $\aleph_{\sigma_\eta}^\kappa \geq \aleph_\alpha$, s.p.d.g. $\eta \geq \kappa$, y (como $\sigma_\eta \geq \eta$, por ser $\{\sigma_\xi\}_\xi$ creciente)

$$\aleph_{\sigma_\eta}^{|\sigma_\eta|} \geq \aleph_{\sigma_\eta}^\kappa = \aleph_\alpha^\kappa > \prod_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} \geq \prod_{\xi<\eta} \aleph_{\sigma_\xi},$$

lo que contradice la minimalidad de β.

Como, de todos modos, $\aleph_{\sigma_\xi}^\kappa > \aleph_\alpha$ para algún $\xi < \beta$, y por tanto para un segmento cofinal de la sucesión $\{\sigma_\xi\}_\xi$, se sigue que $\beta = \lambda + \omega$ con λ límite, y que el mínimo de tales σ_ξ es tal que $\xi > \lambda$.

Pero $\{\aleph_{\sigma_\xi} : \xi \leq \kappa \text{ o } \lambda < \xi < \beta\}$ es también contraejemplo a la conjetura de Tarski. Entonces $\lambda = \kappa$.

Finalmente, como $\beta \geq \omega_1 + \omega$, κ es no contable. $\Box_{(\mathrm{L3})}$

Sea γ mínimo con $\aleph_\gamma^\kappa > \aleph_\alpha$. De lo mostrado en el Lema 3 se sigue que $\gamma > 0$ y, por Hausdorff, γ es límite; además $\forall\delta < \gamma\,(\aleph_\delta^\kappa < \aleph_\gamma)$, por minimalidad, así que $(<\aleph_\gamma)^\kappa = \aleph_\gamma$, y del Lema 2 se sigue que $\kappa \geq \operatorname{cf}\aleph_\gamma = \operatorname{cf}\gamma$, de modo que $\aleph_\gamma^\kappa = \aleph_\gamma^{\operatorname{cf}\gamma}$, lo que implica que también $\aleph_\alpha^{\operatorname{cf}\gamma} = \aleph_\alpha^\kappa$. Como $\{\aleph_{\sigma_\xi} : \xi \leq \operatorname{cf}\gamma \text{ o } \kappa < \xi < \beta\}$ es un contraejemplo a la conjetura, por minimalidad $\operatorname{cf}\gamma = \kappa$.

Como $\aleph_\gamma^{\operatorname{cf}\gamma} > \aleph_\alpha > \aleph_{\sigma_\kappa}^\kappa \geq \aleph_\kappa^\kappa = \aleph_\kappa^{\operatorname{cf}\gamma}$ (por lo mostrado en el Lema 3), $\gamma > \kappa$.

Por último, $\prod_{\xi<\beta}\aleph_{\sigma_\xi} = \prod_{\xi<\kappa}\aleph_{\sigma_\xi}\prod_{\kappa\leq\xi<\kappa+\omega}\aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_{\sigma_\kappa}^\kappa\aleph_\alpha^\omega = \aleph_\alpha^\omega$. Entonces $\aleph_\gamma^\kappa > \aleph_\alpha^\omega$. Pero $\alpha = \lim_{\kappa\leq\xi<\kappa+\omega}\sigma_\xi \geq \gamma + \omega$, y

$$\aleph_\gamma^\kappa > \aleph_{\gamma+\omega}^\omega, \quad \gamma > \operatorname{cf}\gamma = \kappa > \omega, \quad \forall\delta < \gamma\,(\aleph_\delta^\kappa < \aleph_\gamma),$$

como demostrábamos.

El resultado de [JSh1] ($\kappa = \omega_1$) se obtiene con ayuda de la teoría de pcf, que será expuesta en el capítulo **2**, donde será demostrado. $\Box_{(\mathrm{T1})}$

Las consecuencias de SCH en la aritmética cardinal también restringen las posibilidades de algunas estructuras matemáticas. Mencionamos en particular, sin demostración:

Teorema 2. *Asuma SCH. Entonces*

a) *[Sh6] Si $\mu \geq \beth_2$ es el número de abiertos de un espacio Hausdorff, entonces $\operatorname{cf}\mu > \aleph_0$. De hecho, si $\mu < \mu^\omega$ (lo que bajo SCH, como $\beth_2 \leq \mu$, equivale a $\operatorname{cf}\mu = \aleph_0$), entonces*

$$\exists\kappa,\lambda\,\big((\kappa + 2^{<\lambda})^{+\omega} \leq \mu < \kappa^{<\lambda}\big),$$

lo que claramente contradice b) del Teorema 1.

b) *[Comfort-Robertson. 1981] Sea K un grupo topológico. Suponga que K es T_0 (y, por tanto, Hausdorff y completamente regular) y compacto. K', un subgrupo de K, es* seudocompacto *sii toda función continua de K' en $\mathbb{R}$ es acotada. Sean $m(K)$ el mínimo cardinal de un subgrupo denso seudocompacto de K, y $w(K)$ el* peso *de K, es decir, el mínimo tamaño de una base de K.*

Si $\omega \leq \alpha = w(K)$ y $(\log\alpha)^\omega = 2^\alpha$, donde $\log\alpha$ es el mínimo κ tal que $2^\kappa \geq \alpha$, entonces

$$m(K) = |K|. \quad \Box_{(\mathrm{T2})}$$

Para una demostración de b) puede verse [Com], donde también se muestra que si $(\log\alpha)^\omega < 2^\alpha$, sin hipótesis conjuntistas adicionales se tiene que $m(K) < |K|$.

Def. 1. $\gimel(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$. $\gimel$ es la tercera letra del alfabeto hebreo, gimel.

La primera desigualdad no trivial en la aritmética cardinal es bien conocida, y se debe a König:

- *Si $\kappa_i < \lambda_i \, \forall i \in I$, entonces $\sum_i \kappa_i < \prod_i \lambda_i$.* $\Box_{(\bullet)}$

Para una demostración, ver [D], [Dr] o [J1]. Los siguientes son corolarios inmediatos:

- $\gimel(\kappa) > \kappa$.
- κ^+ es regular.
- $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$. Por tanto, $2^\kappa > \kappa$.

De aquí resulta que $2^\kappa \geq \kappa^+$. Como mostraremos, y esperamos que sea claro de la Introducción, cualquier otro resultado al respecto requiere de hipótesis adicionales, o de un estudio más cuidadoso.

Ya estamos en posición de establecer un resultado global:

- *Si β es t.q. $\forall \alpha \, (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta})$ entonces $\beta < \omega$.*

Dem: Procedamos por contradicción, y supongamos que $\beta \geq \omega$ es como en la hipótesis. Consideremos el menor α t.q. $\alpha + \beta > \beta$. Entonces $\beta \geq \alpha$, y α es límite pues si $n \in \omega$, $n + \beta = \beta$. Sea $\kappa = \aleph_{\alpha \cdot 2}$. κ es singular ($\mathrm{cf}\,\kappa = \mathrm{cf}\,\alpha \cdot 2 = \mathrm{cf}\,\alpha < \kappa$) y si $\eta < \alpha$ entonces

$$2^{\aleph_{\alpha+\eta}} = \aleph_{(\alpha+\eta)+\beta} = \aleph_{\alpha+\beta},$$

por minimalidad de α.

Se cumplen así las condiciones del resultado de Bukovský y Hechler (Lema 1.b)), de modo que

$$2^\kappa = \aleph_{\alpha+\beta} < \aleph_{\alpha \cdot 2+\beta},$$

una contradicción. $\Box_{(\bullet)}$

La función gimel es objeto de atención gracias al siguiente resultado, inmediato de los Lemas 1 y 2:

- *[Bukovský] La exponenciación está completamente determinada por las funciones $\gimel$ y cf.* $\Box_{(\bullet)}$

Observación. La mención de la cofinalidad no es gratuita: Prikry mostró que pueden modificarse mediante forcing las cofinalidades sin colapsar cardinales. Para esto usó un medible; Dodd y Jensen [DoJe1,2] y Mitchell [Mi7] mostraron la equiconsistencia: si hay un tal forcing, entonces hay (un modelo interno con) un medible (más exactamente, Dodd y Jensen mostraron que si κ es regular y en una extensión se vuelve (límite fuerte) singular de cofinalidad ω, hay un modelo interno donde κ es medible. Magidor [Ma4] y Mitchell establecieron las hipótesis de cardinales grandes equiconsistentes con la existencia de una extensión que cambiara la cofinalidad de κ a $> \omega$; estas hipótesis son mayores que la existencia de un medible). Es claro de momento que si la función $\kappa \mapsto \mathrm{cf}(\kappa)$ se modifica, sin colapsar cardinales, tiene que existir al menos un inaccesible (el primer κ donde la función cambia), pero que en consistencia sea necesario asumir su existencia es más exigente. En el capítulo 1 mostraremos que un tal forcing implica la existencia de $0^\sharp$, dando así un resultado más débil pero en esta dirección.

Las principales propiedades de la función $\gimel$ fueron estudiadas por Jech:

• *Sea $\lambda < \kappa$ t.q. $\operatorname{cf}\lambda \geq \operatorname{cf}\kappa$ y $\kappa \leq \gimel(\lambda)$. Entonces $\gimel(\kappa) \leq \gimel(\lambda)$.*

Dem: $\gimel(\kappa) = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} \leq (\gimel(\lambda))^{\operatorname{cf}\kappa} = (\lambda^{\operatorname{cf}\lambda})^{\operatorname{cf}\kappa} = \lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \gimel(\lambda)$. $\square_{(\bullet)}$

• *Si κ es singular y $\lambda^{\operatorname{cf}\kappa} < \kappa \,\forall\lambda < \kappa$, entonces $\operatorname{cf}(\gimel(\kappa)) \geq$ mínimo μ t.q. $\lambda^{\mu} \geq \kappa$ para algún $\lambda < \kappa$. En particular, si κ es límite fuerte, $\operatorname{cf}(\gimel(\kappa)) > \kappa$.*

Dem: Aunque el caso particular se sigue de inmediato del general, una prueba directa también es fácil: Si κ es límite fuerte, $2^{<\kappa} = \kappa$ y $\kappa^{\operatorname{cf}\kappa} = 2^{\kappa}$, por el Lema 1. Para el caso general, sea κ como en la hipótesis. Usemos el Lema 2:
Sea λ menor que el mínimo definido en la hipótesis. Entonces

$$\kappa^{\lambda} \leq \gimel(\kappa)(<\kappa)^{\lambda} = \gimel(\kappa)\cdot\kappa = \gimel(\kappa), \quad \text{y}$$

$\gimel(\kappa)^{\lambda} = (\kappa^{\lambda})^{\operatorname{cf}\kappa} = \gimel(\kappa)$. $\square_{(\bullet)}$

Como corolario, obtenemos el siguiente resultado, que figura como ejercicio en [J1]:

• *Si $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_1}$.*

Dem: Por Hausdorff, $\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n \cdot 2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$, así que, por el resultado anterior, $\operatorname{cf}(\gimel(\aleph_\omega)) \geq \aleph_2$. $\square_{(\bullet)}$

En el capítulo 2 mostraremos que si $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, entonces $\gimel(\aleph_\omega)$ es regular y menor que $\aleph_{\omega_4}$ (en particular, sucesor), lo cual es inalcanzable con el tipo de análisis que llevamos.

3. Combinatoria.

Usualmente, incluso desde la demostración de las desigualdades de Galvin-Hajnal, haremos uso de resultados básicos de combinatoria infinita. Los recopilamos acá; la mayoría de las demostraciones serán omitidas.

a. Clubs:

Def. 2. Sea κ un cardinal.

a) Un conjunto $\mathcal{U} \subseteq \kappa$ es *cerrado y no acotado* en κ sii lo es según la topología del orden. En tal caso, decimos que $\mathcal{U}$ es un club (closed-unbounded) en κ.
b) $S \subseteq \kappa$ es *estacionario* en κ sii $S \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{U}$ club en κ.

En ambos casos, si κ es claro del contexto, omitiremos las palabras "en κ".

Estas nociones son triviales si $\operatorname{cf}\kappa = \omega$: En tal caso, toda sucesión cofinal sería un club, y el único estacionario es κ mismo.

Lema 4.

a) *Supongamos que $\operatorname{cf}\kappa > \omega$. La intersección de menos de $\operatorname{cf}\kappa$ clubs es un club.*
b) *Si κ es regular, la intersección diagonal (ver abajo) de κ clubs es un club.*
c) *[Fodor] Si κ es regular, S es estacionario y $f : S \to \kappa$ es regresiva (ver abajo) entonces $\exists\gamma\,(\{\,\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\,\}$ es estacionario).* $\square_{(L4)}$

En [Ku5] puede verse una demostración, o referirse al Lema 11.

Def. 3.

a) Si $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ es una colección de subconjuntos de κ, su *intersección diagonal* es

$$\triangle_\alpha C_\alpha = \{ \beta < \kappa : \forall \alpha < \beta (\beta \in C_\alpha) \}.$$

b) Análogamente, la *unión diagonal* de los C_α es

$$\nabla_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha C_\alpha \setminus (\alpha + 1).$$

c) Sean $S \subseteq \kappa \setminus \{0\}$ y $f : S \to \kappa$. Decimos que f es *regresiva* (en S) cuando $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$.

d) Si $\lambda > \omega$ es regular, $\mathcal{C}_\lambda$ es el *filtro club* sobre λ:

$$\mathcal{C}_\lambda = \{ X \subseteq \lambda : \exists Y \text{ club en } \lambda (Y \subseteq X) \}.$$

Correspondientemente, NS_λ es el *ideal de los (subconjuntos) no estacionarios* de λ:

$$\mathrm{NS}_\lambda = \{ X \subseteq \lambda : \lambda \setminus X \in \mathcal{C}_\lambda \}.$$

Trabajaremos constantemente con filtros e ideales. Como arriba, dado un filtro hay una manera natural de asociarle un ideal (y viceversa), de modo que, cuando se dé el caso, saltaremos de un concepto a otro según resulte conveniente. La intuición usual es que los elementos de los filtros son conjuntos grandes y los de los ideales son, por tanto, pequeños.

Def. 4. Una *matriz de Ulam* $\lambda \times \lambda^+$ es una colección $\{ X^\xi_\alpha : \alpha < \lambda^+, \xi < \lambda \}$ de subconjuntos de λ^+ t.q.

a. $\alpha < \beta < \lambda^+, \xi < \lambda \longrightarrow X^\xi_\alpha \cap X^\xi_\beta = \emptyset$.

b. $\alpha < \lambda^+ \longrightarrow \left|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\xi<\lambda} X^\xi_\alpha\right| \leq \lambda$.

Teorema 3. *[Ulam] Si I es un ideal λ^+-completo sobre λ^+ que contiene todos los singletons, hay una matriz de Ulam $\lambda \times \lambda^+$ con todos sus elementos fuera de I.* $\square_{(\mathrm{T3})}$

Para una prueba, ver [Ku5]. donde también se da la siguiente aplicación, que muestra su utilidad:

Sea $S \subseteq \lambda^+$ estacionario. $I = \{ X \subseteq \kappa : X \cap S \text{ es no estacionario} \}$ es como en el teorema. Por tanto, todo estacionario en λ^+ puede particionarse en λ^+ estacionarios disyuntos. Solovay mostró, con un argumento bastante más elaborado, que esto es verdad con cualquier regular, incluso si no es sucesor.

b. Cálculo de Particiones.

Necesitamos también el siguiente resultado, conocido como *el teorema de Erdős-Rado*:

Def. 5. $\alpha \to (\beta)^n_\gamma \iff \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ORD}, n \in \omega$, y si $f : [\alpha]^n \to \gamma$, entonces hay un $X \subseteq \alpha$ de tipo de orden β, *homogéneo* para f, es decir, $|f``[Y]^n| = 1$.

La referencia obligada para resultados respecto a esta relación es [ErHMáRa].

Teorema 4. *[Erdős-Rado]* $\forall n \in \omega\, \forall \kappa$ *infinito*

$$(\beth_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa. \quad \square_{(T4)}$$

Para el resultado de Galvin y Hajnal no será necesario todo el teorema; de hecho, el caso $n = 1$ será suficiente. El siguiente lema puede hallarse en [ErHMáRa] Teorema 44.3. Es debido a Hajnal (1960), y resuelve una conjetura de 1936.

Def. 6. Una *aplicación conjuntista* en E es una función $f : E \to \mathcal{P}(E)$ t.q. $\forall x \in E\,\big(x \notin f(x)\big)$. Dada f, una aplicación conjuntista en E, decimos que $H \subseteq E$ es *libre* respecto a f sii $\forall x \in H\,\big(H \cap f(x) = \emptyset\big)$.

Lema 5. *Si $\lambda < \kappa$ y f es una aplicación conjuntista en κ t.q. $\forall x \in \kappa\,\big(|f(x)| < \lambda\big)$, entonces existe un conjunto de tamaño κ libre respecto a f.* $\square_{(L5)}$

Def. 7. $\kappa \to [\lambda]^\nu_\mu \iff \forall f : [\kappa]^\nu \to \mu\, \exists X \subseteq \kappa\,\big(|X| = \lambda \wedge f``[X]^\nu \neq \mu\big)$.

El parámetro ν suele suponerse un natural debido al siguiente

Teorema 5. *[Erdős-Hajnal. 1966]* $\forall \kappa \geq \omega\,\big(\kappa \not\to [\kappa]^{\aleph_0}_\kappa\big)$. *Esto es: si κ es infinito, existe entonces una función $f : [\kappa]^\omega \to \kappa$ tal que para cualquier subconjunto X de κ de tamaño κ $f``[X]^\omega = \kappa$. Una función testigo de esto se dice ω-*Jónsson *para κ.*

Para una demostración, ver [ErHmáRa] Teorema 55.2, [K] o [KReSo]. Nosotros sólo requerimos de un caso particular: κ singular límite fuerte de cofinalidad ω. En este caso, [Ku3] trae una demostración muy sencilla:

Dem: [Kunen] ($k > \mathrm{cf}\,\kappa = \omega$, κ límite fuerte). Nótese que $\kappa^\omega = 2^\kappa = \kappa^\kappa$, así que hay una enumeración (1-1) $\big((A_\alpha, \xi_\alpha) : \alpha < 2^\kappa\big)$ de $[\kappa]^\kappa \times \kappa$. Por inducción, escójase $s_\alpha \in [A_\alpha]^\omega \setminus \{\, s_\beta : \beta < \alpha \,\}$, y sea F t.q. $F(s_\alpha) = \xi_\alpha$.

Tenemos que verificar que cada vez que $A \in [\kappa]^\kappa$, $F``[A]^\omega = \kappa$. Pero esto es obvio, pues $A$ aparece listado $\kappa$ veces, una por cada elemento de $\kappa$, y si $A = A_\beta$, entonces $\xi_\beta \in F``[A]^\omega$. $\square_{(T5)}$

c. Sistemas Δ.

Def. 8. Una familia $\mathcal{A}$ es un *sistema* Δ, o una familia *cuasidisyunta* de conjuntos sii

$$\exists r\, \forall a, b \in \mathcal{A}\,(a \neq b \longrightarrow a \cap b = r).$$

El r de arriba es la *raíz* del sistema Δ.

Lema 6. *Sean $\theta = \mathrm{cf}\,\theta > \kappa \geq \omega$ con $\forall \lambda < \theta\,(\lambda^{<\kappa} < \theta)$. Si $|\mathcal{A}| \geq \theta$ y $\forall x \in \mathcal{A}\,(|x| < \kappa)$, hay un $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| = \theta$ que es un sistema Δ.* $\square_{(L6)}$

Para una demostración, ver [Ku5].

Este resultado, el *lema del sistema* Δ, es muy útil en forcing porque permite establecer condiciones de cadena.

4. Cardinales Grandes.

Los cardinales grandes, aunque pueden aparecer de manera natural en diversos contextos, trascienden ZFC. Ya con los (debilmente) inaccesible no puede demostrarse su existencia. Asumimos que la teoría de cardinales grandes es conocida en sus primeros niveles. [Bo] y [Dr] son buenas introducciones al tema de cardinales grandes en general, y [J1] también los estudia con cuidado; nuestras referencias usuales serán [K], [KMa], y el excelente artículo [KReSo]. Otro artículo inspirador es [KeTa], aunque la diferencia de notación podría representar al comienzo un problema.

Hay varias motivaciones para estudiar cardinales grandes. Por supuesto, está su interés intrínseco, y en nuestro caso hay otra razón, que resulta muy importante: Siguiendo a [Wo], dada una sentencia φ, sean T_{ZFC} la colección de teoremas de teoría de números deducibles a partir de ZFC y T_φ la de tales teoremas deducibles a partir de $\mathrm{ZFC}\cup\{\varphi\}$. Es un resultado empírico que para cualquier proposición φ o bien $T_\varphi = T_{\mathrm{ZFC}}$ o bien $T_\varphi = T_\psi$, donde ψ es una hipótesis de cardinales grandes (h.c.g.), intuitivamente, una proposición que afirma (o implica) la existencia de ciertos cardinales que trascienden, en algún sentido, los cardinales menores, y proveen de estructura adicional al universo.

Para las h.c.g., el orden natural de los T_ψ (por contenencia) coincide con el orden de consistencia: $T_{\psi_1} \subseteq T_{\psi_2} \iff (\mathrm{Con}(\psi_2) \to \mathrm{Con}(\psi_1))$. Así que, al menos hasta ahora, las h.c.g. son el patrón natural con quien comparar una proposición bajo estudio, en consistencia relativa.

Qué tan 'independiente' de ZFC resulte una afirmación depende de qué tan lejos debamos ir en el orden $\subseteq$ de los T_ψ hasta encontrar una hipótesis equiconsistente. Nada garantiza a priori que esto sea posible, pero así ha resultado para las preguntas que se han considerado en teoría de conjuntos hasta el momento. En particular, las h.c.g. han jugado un papel fundamental en el estudio del problema de los cardinales singulares.

Algunas consideraciones o principios intuitivos son convenientes antes de pasar a mirar las hipótesis en sí. El artículo [KReSo] presenta 4:

Generalización: Se espera que los cardinales grandes compartan propiedades de ω o cardinales menores. Así pueden motivarse medibilidad, compacidad fuerte, e incluso supercompacidad.

Reflexión: La idea es que la clase ORD de los ordinales es 'indescribible', de modo que cualquier propiedad que posea debería poseerla ya algún ordinal. Ésta fue la directriz qye siguió Reinhardt para introducir extendibilidad.

Semejanza: Similar al anterior; se espera que los V_α eventualmente comiencen a 'parecerse' entre sí.

Restricción: Kunen estableció una cota superior en las h.c.g., mostrando que un principio introducido por Reinhardt era inconsistente. Pero restringiendo este principio pueden encontrarse propiedades aun interesantes. Con esta idea también pueden motivarse los cardinales fuertes e hipermedibles.

Maddy [M1,2] analiza los axiomas usuales de ZFC, determinancia y las h.c.g. a la luz de estos y otros principios, que ella llama *uniformidad* ('las situaciones interesantes deben presentarse una y otra vez'), *realismo*, etc. Su lectura puede proveer de intuiciones apropiadas para trabajar con los cardinales que hallaremos en un momento.

No es nuestra intención discutir si estos cardinales 'realmente' existen o no. Ellos proveen de estructura al universo y están tan ligados al problema que consideramos que formularnos tal pregunta no parece muy lejano de cuestionarnos si hay o no conjuntos. Debería bastar que las h.c.g. son proposiciones interesantes, y por tanto dignas de estudio.

Def. 9. Sea $\operatorname{tr cl}(x)$ la *clausura transitiva* de x (el mínimo conjunto transitivo que contiene a x). Si κ es infinito,

$$H_\kappa = \{\, x : |\operatorname{tr cl}(x)| < \kappa \,\}.$$

Lema 7. *H_κ es un conjunto.*

Dem: De hecho, $H_\kappa \subseteq V_\kappa$: Si $x \in H_\kappa$, $y = \operatorname{tr cl}(x)$ y $\alpha = \operatorname{rank}(x) = \{\operatorname{rank}(w) : w \in y\}$, $|\alpha| \leq |y| < \kappa$. $\square_{(L7)}$

Es fácil ver que $H_\kappa = V_\kappa$ sii ($\kappa = \omega$ o) κ es fuertemente inaccesible.

Teorema 6. *Sea κ regular $> \omega$.*
(1) *$\langle H_\kappa, \in\rangle \models$ ZFC$^-$ (ZFC sin partes).*
(2) *$\langle H_\kappa, \in\rangle \models$ ZFC sii κ es inaccesible.*
Es decir, la relativización a H_κ de cada axioma de ZFC$^-$ (o ZFC) vale.

Dem: (1) es fácil. Comprensión vale porque si $x \in H_\kappa$ entonces $\mathcal{P}(x) \subseteq H_\kappa$. Excepto por remplazo o elección, ningún axioma presenta problema. Más adelante daremos una demostración análoga, que puede adaptarse sin dificultad (Teorema 11). Para remplazo. basta notar que $x \in H_\kappa \longleftrightarrow x \subseteq H_\kappa \wedge |x| < \kappa$ —por regularidad—. Para elección, obsérvese que si $x \in H_\kappa$ y R es un buen orden de x, $R \in H_\kappa$ y $\langle H_\kappa, \in\rangle \models R$ es un buen orden de x.

(2) Partes vale en H_κ sii $x \in H_\kappa$ implica $\mathcal{P}(x) \in H_\kappa$. Si κ es inaccesible esto ocurre, pero si no lo es, y $\lambda < \kappa \leq 2^\lambda$, λ y $\mathcal{P}(\lambda)$ son un contraejemplo. $\square_{(T6)}$

a. Cardinales Medibles.

Def. 10. Un cardinal $\kappa > \omega$ es *medible* sii existe un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ.

Nos referiremos a tales ultrafiltros como medidas (lo son: Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo no principal, definiendo $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to 2$ por $X \mapsto \chi_{\mathcal{U}}(X)$, μ es una medida bivaluada no atómica κ-completa en $\mathcal{P}(\kappa)$). Los cardinales medibles son grandes. Antes de explorar qué tan grandes, podemos comenzar estableciendo:

Teorema 7. *[Tarski-Ulam] Si κ es medible, entonces es inaccesible.*

Dem: Claramente κ es regular. Si κ es sucesor, $\kappa = \lambda^+$, consideremos una matriz de Ulam $\lambda \times \lambda^+$ $\{X^\xi_\alpha : \alpha < \lambda^+, \xi < \lambda\}$ (def. 4). Sea $\mathcal{U}$ una medida sobre κ. $\forall \alpha < \lambda^+ \exists \xi < \lambda\, (X^\xi_\alpha \in \mathcal{U})$, pues $\left|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\xi<\lambda} X^\xi_\alpha\right| \leq \lambda$ y $\mathcal{U}$ es λ^+-completa. Por regularidad, hay un $\xi < \lambda$ t.q. $X^\xi_\alpha \in \mathcal{U}$ para λ^+ valores de α. Esto es una contradicción, pues $X^\xi_\alpha \cap X^\xi_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$.

Entonces κ es límite. Sea $\rho < \kappa$. Basta ver que $\mathcal{U}$ es $(2^\rho)^+$-completa, así que sea $\{X_f : f \in {}^\rho 2\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ t.q. $\bigcup_f X_f \in \mathcal{U}$. Sea $h : \lambda \to 2$ t.q. $\alpha < \rho$ implica $Y_\alpha = \bigcup_{f(\alpha)=h(\alpha)} X_f \in \mathcal{U}$. Entonces $X_f = \bigcap_\alpha Y_\alpha \in \mathcal{U}$. $\square_{(T7)}$

Pasaron 30 años entre su definición, debida a Ulam, y los trabajos de Scott. Hasta entonces no se había podido determinar si el primer medible era mayor que el primer inaccesible.

a.α. Sumersiones Elementales.

Def. 11. $\mathcal{M}$ es un *modelo interno* (para $T \supseteq \text{ZF}$) sii es una clase transitiva modelo de T que contiene todos los ordinales.

Esta definición requiere un número infinito de cláusulas: una por cada axioma de T. Reducirlo a una fórmula requiere algo de trabajo, y volveremos a esto en un momento.

$\mathbb{N}$ denota la colección de naturales de la metateoría. Usualmente, mediante una gödelización, resultados respecto a $\mathbb{N}$ (establecidos en la metateoría) pueden probarse respecto a ω en ZFC aunque, por los teoremas de incompletitud de Gödel y el teorema de indefinibilidad de la verdad de Tarski, hay excepciones.

Def. 12. Sea $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_\in$ un lenguaje de primer orden. La *jerarquía de Levy* de fórmulas de $\mathcal{L}$ se define por inducción en la metateoría:

a. φ es $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ sii es lógicamente equivalente a una fórmula con todos sus cuantificadores acotados.
b. φ es Π_n sii es lógicamente equivalente a una fórmula de la forma $\neg\psi$ con ψ Σ_n.
c. $\Delta_n = \Pi_n \cap \Sigma_n$.
d. φ es Σ_{n+1} sii es lógicamente equivalente a una fórmula de la forma $\exists x_0 \ldots \exists x_m\, \psi$, con ψ Π_n.
e. Sea T una teoría. φ es Σ_n^T (Π_n^T, Δ_n^T) sii $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, donde ψ es Σ_n (Π_n, Δ_n).

Esta definición es formalizable sin problema.

Lema 8. *Si φ es Σ_n^{ZF} (Π_n^{ZF}) también lo son $\exists x \in y\, \varphi$ y $\forall x \in y\, \varphi$.* $\square_{(\text{L8})}$

Muchos conceptos importantes son expresables en los primeros niveles de la jerarquía. Asumimos conocidos los resultados al respecto de [Ku5], cáp. IV. Específicamente, las definiciones de relativización, de preservación hacia arriba o hacia abajo de una fórmula φ respecto a 2 clases transitivas M y N, $M \subseteq N$, de fórmula absoluta respecto a 2 clases, y el siguiente

Teorema 8. *Toda fórmula Σ_1^{ZF} se preserva hacia arriba y toda Π_1^{ZF} lo hace hacia abajo. Por tanto, las fórmulas Δ_1^{ZF} son absolutas para modelos transitivos de ZF. Las fórmulas Σ_0 son absolutas para modelos transitivos.* $\square_{(\text{T8})}$

Por un *modelo* transitivo entenderemos por defecto una estructura de la forma $\langle M, \in \rangle$ —M puede ser una clase propia. En tal caso, hablamos de una clase que represente este 'par'—.

Para conjuntos puede definirse la relación de satisfacción $\models$ por medio de una fórmula Δ_1^{ZF} (Sección 1.9 de [D]). Para clases transitivas, en general, esto no es posible por el teorema de Tarski sobre indefinibilidad de la verdad. Pero puede definirse, por inducción en $\mathbb{N}$, una relación de satisfacción $\models_M^n$ para M fija y $n \in \mathbb{N}$ dado. $\models_M^n$ es la relación de satisfacción para fórmulas Σ_n. Ver [K] para detalles.

Los siguientes 2 resultados son básicos:

Teorema 9. *[del Colapso de Mostowski] Sea M una clase t.q. hay una relación (una clase) R con $R\restriction_M$ bien fundamentada, extensional (si φ es el axioma de extensionalidad, $\varphi^{(M,R)}$) y como-conjuntista (set-like: $\forall x \in M\, \exists y\, (y = \{\, z \in M : zRx\,\})$).*

Entonces hay un único N transitivo, y un único isomorfismo $\Phi : \langle M, R\rangle \xrightarrow{\sim} \langle N, \in\rangle$.

Dem: Defina Φ por $R\restriction_M$-inducción: $\Phi(x) = \{\, \Phi(y) : y \in M \wedge yRx\,\}$, y sea $N = \operatorname{Ran}\Phi$. $\square_{(\mathrm{T9})}$

Para detalles, ver [Ku5], cáp. III. Esto será fundamental al trabajar con ultrapotencias.

Teorema 10. *[Reflexión] Sea M una clase. Supongamos que hay una sucesión de conjuntos $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{ORD}}$ $\subseteq$-creciente, continua, y que tiende a M. Entonces, para cualesquiera fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,*

$$\forall\alpha\, \exists\beta > \alpha\, (\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ son absolutas para } M_\beta,\ M). \quad \square_{(\mathrm{T10})}$$

Este teorema (debido a Montague) se prueba con una argumento de tipo Skolem. Una vez más, [Ku5], cáp. IV provee los detalles. Su importancia radica, además de su utilidad técnica, en que provee una justificación intuitiva para diversos axiomas de cardinales grandes. Nótese que, como corolario, si $T \supseteq \mathrm{ZF}$ es consistente, entonces no es finitamente axiomatizable.

Lema 9. *[Levy] Si $\varphi(x, \vec{y})$ es Σ_1, $\kappa > \omega$ y $\vec{b} \in H_\kappa$ entonces, si $\exists x \varphi(x, \vec{b})$, hay un $a \in H_\kappa$ con*

$$H_\kappa \models \varphi[a, \vec{b}].$$

Dem: Sea $\varphi \equiv \exists \vec{z}\, \psi(x, \vec{y}, \vec{z})$ con ψ Δ_0. Si $\chi(u, \vec{y}) \equiv \exists x \in u\, \exists \vec{z} \in u\, \psi(x, \vec{y}, \vec{z})$, χ es Σ_0 y χ y φ son equivalentes (sin usar el axioma de partes). Además, si $\chi[c, \vec{b}]$ para $c \in H_\kappa$, entonces $H_\kappa \models \chi[c, \vec{b}]$, y hay un $a \in H_\kappa$ con $H_\kappa \models \varphi[a, \vec{b}]$.

Así que podemos suponer, s.p.d.g., que φ es Σ_0. Es fácil ver que tampoco hay tal pérdida en suponer que κ es sucesor, así que sean λ t.q. $\kappa = \lambda^+$, $b_0, \ldots, b_n \in H_\kappa$ y a t.q. $\varphi[a, \vec{b}]$. Por reflexión, sea α t.q. $a, \vec{b} \in \mathrm{V}_\alpha$ y $\varphi^{\mathrm{V}_\alpha}[a, \vec{b}]$. Así, $\langle \mathrm{V}_\alpha, \in\rangle \models \varphi[a, \vec{b}]$. Por Löwenheim-Skolem, podemos hallar $\langle y, \in\rangle \prec \langle \mathrm{V}_\alpha, \in\rangle$ con $\operatorname{tr\,cl}(\{\vec{b}\}) \cup \{a\} \subseteq y$, $|y| \leq \lambda$. Por Mostowski, existen y' transitivo y un isomorfismo $\pi : y \xrightarrow{\sim} y'$, únicos. Como $\operatorname{tr\,cl}(b_i) \subseteq y$ $(i \leq n)$, $\pi\restriction_{\operatorname{tr\,cl}(b_i)} = \mathrm{id}_{\operatorname{tr\,cl}(b_i)}$, así que $\langle y', \in\rangle \models \varphi[\pi(a), \vec{b}]$. Como φ es Σ_0, es absoluta para modelos transitivos. Como $|y'| \leq \lambda$, $|\operatorname{tr\,cl}(y)| \leq \lambda$, así que y' (y por tanto $\pi(a)$) está en H_κ. $\square_{(\mathrm{L9})}$

Como la relación de satisfacción para conjuntos es definible y Δ_1^{ZF}, tiene sentido hablar de

$$\operatorname{def}(x) := \{\, y \subseteq x : y \text{ es definible sobre } \langle x, \in\rangle \,\}.$$

Def. 13. $\operatorname{Inn}(x) \equiv x$ es transitivo $\wedge\ \forall\alpha\, (\operatorname{def}(x \cap \mathrm{V}_\alpha) \subseteq x)$.

Teorema 11. *M es un modelo interno de ZF sii* $\mathrm{Inn}(M)$.

Dem: $\llcorner\!\leftarrow\!\urcorner$ Por inducción en α, $\alpha \in \mathrm{def}(M \cap \mathrm{V}_{\alpha+1})$, luego $\mathrm{ORD} \subseteq M$. Así mismo, $\{ M \cap \mathrm{V}_\alpha = \mathrm{V}_\alpha^M : \alpha \in \mathrm{ORD} \} \subseteq M$, y $\mathrm{def}(\mathrm{V}_\alpha^M)$ es transitivo $\forall\alpha$.

Para cada φ axioma de ZF mostremos φ^M.

a. *Extensionalidad.* Se sigue de que M es transitiva.

b. *Unión.* Sea $x \in M$. $y = \bigcup x \in M$ pues es definible y $\mathrm{def}(\mathrm{V}_\alpha^M)$ es transitivo. Es fácil ver que $y = \left(\bigcup x\right)^M$.

c. *Infinito.* $\omega \in M$.

d. *Fundamentación.* M es transitiva.

e. *Partes.* Sean $x \in M$, $y = \mathcal{P}(x)^M$. Tenemos que mostrar que $y \in M$: Sea β suficientemente grande para que $y \subseteq \mathrm{V}_\beta^M$. Entonces $y = \{ z \in \mathrm{V}_\beta^M : \mathrm{V}_\beta^M \models z \subseteq x \} \in \mathrm{def}(\mathrm{V}_\beta^M)$.

f. *Pares.* Por e.

g. *Comprensión.* Sean $\varphi(\vec{x})$ una fórmula, y $a, \vec{b} \in M$, digamos, $a, \vec{b} \in \mathrm{V}_\alpha^M$. Por reflexión, existe $\beta > \alpha$ t.q.

$$\forall \vec{y} \in \mathrm{V}_\beta^M \left(\varphi^{\mathrm{V}_\beta^M}(\vec{y}) \leftrightarrow \varphi^M(\vec{y})\right).$$

Sea $z = \left\{ y \in \mathrm{V}_\beta^M : \mathrm{V}_\beta^M \models (\varphi(y, \vec{b}) \wedge y \in a) \right\} \in \mathrm{def}(\mathrm{V}_\beta^M)$. Pero

$$z = \left\{ y \in a : \varphi^{\mathrm{V}_\beta^M}(y, \vec{b}) \right\} = \left\{ y \in a : \varphi^M(y, \vec{b}) \right\}.$$

h. *Remplazo.* Sea $\varphi(x, y, z, \vec{w})$ una fórmula, y sean $a, \vec{b} \in M$. Supongamos que $\forall x \in a \, \exists! y \in M \, \varphi^M(x, y, a, \vec{b})$. Queremos hallar un $c \in M$ t.q. $\forall x \in a \, \exists y \in c \, \varphi^M(x, y, a, \vec{b})$.

Como antes, podemos hallar α suficientemente grande t.q. $a, \vec{b} \in \mathrm{V}_\alpha^M$, $\left\{ y \in M : \exists x \in a \, \varphi^M(x, y, a, \vec{b}) \right\} \subseteq \mathrm{V}_\alpha^M$ y $\forall x, y \in \mathrm{V}_\alpha^M \left(\varphi^M(x, y, a, \vec{b}) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{V}_\alpha^M}(x, y, a, \vec{b})\right)$.

Entonces $c = \left\{ y \in \mathrm{V}_\alpha^M : \exists x \in a \, \varphi^{\mathrm{V}_\alpha^M}(x, y, a, \vec{b}) \right\}$ sirve.

$\ulcorner\!\rightarrow\!\lrcorner$ Supongamos que M es un modelo interno. Por inducción, es fácil ver que

$$\forall \alpha \, (\mathrm{def}(\mathrm{V}_\alpha^M) \subseteq M),$$

usando comprensión y partes en M, ya que $\mathrm{def}(x)$ es absoluta para M, V por ser Δ_1^{ZF} (Desde ahora, si φ es absoluta para M, V, se suprimirá la mención a V). $\square_{(\mathrm{T11})}$

Esto no provee una axiomatización finita de ZF, pues la equivalencia se demostró con ayuda de todos los axiomas de ZF.

El teorema nos permite, mediante un rodeo, dar la siguiente definición, sin necesidad de definir $\models_M$:

Def. 14. j es una *sumersión elemental* entre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$, $j : \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\prec} \mathcal{M}_1$ sii

$$\forall n \in \mathbb{N} \, j : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1 \text{ es una sumersión } \Sigma_n\text{-elemental},$$

i.e., sii dados $x_1, \ldots, x_m \in M_0$ y φ Σ_n,

$$\mathcal{M}_0 \models \varphi[\vec{x}] \iff \mathcal{M}_1 \models \varphi[j(\vec{x})].$$

(Acá, y en lo que sigue, $\varphi[j(\vec{x})]$ es $\varphi[j(x_1),\ldots,j(x_m)]$, etc., y no siempre distinguiremos entre $\varphi(x)$ y $\varphi[x]$).

Para poder realizar la definición en la teoría, apelamos al siguiente teorema, de modo que ser sumersión elemental (entre modelos internos) es ser Σ_1-elemental.

Teorema 12. *Sean $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ modelos internos, $j:\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$ Σ_1-elemental. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ j es Σ_n-elemental.*

Dem: Por inducción en la metateoría. Supongamos el resultado demostrado para n, y sea φ Σ_{n+1}, digamos $\varphi \equiv \exists\vec{x}\,\psi(\vec{x},\vec{y})$, ψ Π_n. Sea $\vec{b}$ una tupla de $\mathcal{M}_0$.

Si $\mathcal{M}_0 \models \varphi[\vec{b}]$ entonces $\mathcal{M}_0 \models \psi[\vec{a},\vec{b}]$ para alguna tupla $\vec{a}$ de elementos de M_0 (informalmente, diremos $\vec{a} \in \mathcal{M}_0$). Entonces, por hipótesis de inducción,

$$\mathcal{M}_1 \models \psi[j(\vec{a}),j(\vec{b})].$$

Luego, $\mathcal{M}_1 \models \varphi[j(\vec{b})]$.

Recíprocamente, supongamos $\mathcal{M}_1 \models \varphi[j(\vec{b})]$ para alguna tupla $\vec{b} \in \mathcal{M}_0$, esto es $\mathcal{M}_1 \models \psi[\vec{c},j(\vec{b})]$ para alguna tupla $\vec{c}$ en $\mathcal{M}_1$. Es fácil ver que ser ordinal es absoluto, y por tanto si $\alpha \in \mathcal{M}_0$ es ordinal, $j(\alpha) \in \mathcal{M}_1$ también lo es. Además, por inducción, $j(\alpha) \geq \alpha$.

Como $\mathcal{M}_1 = \bigcup_\alpha \mathrm{V}_\alpha^{\mathcal{M}_1} \subseteq \bigcup_\alpha \mathrm{V}_{j(\alpha)}^{\mathcal{M}_1} = \bigcup_\alpha j(\mathrm{V}_\alpha^{\mathcal{M}_0}) \subseteq \mathcal{M}_1$, podemos tomar $\alpha \in \mathcal{M}_0$ t.q. $\vec{c} \in \mathrm{V}_{j(\alpha)}^{\mathcal{M}_1}$:

$$\mathcal{M}_1 \models \exists\vec{x} \in V_{j(\alpha)}\big(\psi[\vec{x},j(\vec{b})]\big).$$

Pero la fórmula anotada es Σ_n ($\ulcorner y = \mathrm{V}_z\urcorner$ es Π_1^{ZF}), así que por hipótesis de inducción $\mathcal{M}_0 \models \exists\vec{x} \in \mathrm{V}_\alpha\big(\psi[\vec{x},\vec{b}]\big)$, y en particular $\mathcal{M}_0 \models \varphi[\vec{b}]$. $\square_{(\mathrm{T12})}$

Supondremos siempre que una sumersión elemental es no trivial (i.e., no es la identidad).

Teorema 13. *Sean $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ modelos internos. Si $j:\mathcal{M}_0 \xrightarrow{\prec} \mathcal{M}_1$ y ($M_1 \subseteq M_0$ o $\mathcal{M}_0 \models AC$) entonces $\exists\delta\,(j(\delta) > \delta)$.*

Dem: Supongamos $M_1 \subseteq M_0$. Sea x de rango mínimo con $j(x) \neq x$. Sea $\delta = \mathrm{rank}(x)$. $j(\delta) \geq \delta$, así que supongamos que $j(\delta) = \delta$. Si $y \in x$, $j(y) = y$ por minimalidad, y $j(y) \in j(x)$ por elementaridad. Entonces $x \subseteq j(x)$. Luego, hay un $y \in j(x) \setminus x$, y $\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}\big(j(x)\big) = j\big(\mathrm{rank}(x)\big) = j(\delta) = \delta$. Por minimalidad de δ, de nuevo, $y = j(y)$. Entonces, de $j(y) \in j(x)$, se sigue que $y \in x$, una contradicción.

Este caso basta por lo general, pero en el marco de core models y ultrapotencias iteradas no es suficiente (i.e., puede ser que $M_1 \nsubseteq M_0$).

Por eso, supongamos ahora que $\mathcal{M}_0 \models AC$. Sean $x \in \mathcal{M}_0$ y y la clausura transitiva de $\{x\}$ ($\in \mathcal{M}_0$). Sea $\pi \in \mathcal{M}_0$ una biyección entre α y y. Sea $E = \{\,(\beta,\gamma) \in \alpha\times\alpha : \pi(\beta) \in \pi(\gamma)\,\}$. Por contradicción, si $j\restriction_{\mathrm{ORD}} = \mathrm{id}_{\mathrm{ORD}}$, el argumento de arriba establece que todo subconjunto de ordinales es dejado fijo por j, y por tanto también E.

Como E es bien fundamentado en α (i.e., esto vale en V, por tanto en $\mathcal{M}_0$, por tanto en $\mathcal{M}_1$), al serlo $\pi^{-1}(E) = \in\restriction_{\alpha\times\alpha}$ en y, por el teorema del colapso de Mostowski hay en $\mathcal{M}_1$ un isomorfismo $\pi' : \langle\alpha,E\rangle \xrightarrow{\sim} \langle z,\in\rangle$, z transitivo. π' es isomorfismo también en V, así que por unicidad $\pi' = \pi$, $z = y$. Luego, $j(x) = x$, al ser x definible $\big(\forall z \in y\,(z = x \vee \mathrm{rank}\,z < x)\big)$. Por ser x arbitrario, j es la identidad, una contradicción. $\square_{(\mathrm{T13})}$

Def. 15. Dada $j : \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\prec} \mathcal{M}_1$ como en el teorema, $\mathrm{crit}(j) = \min\{\,\delta : j(\delta) > \delta\,\}$.

a.β. Ultrapotencias.

Asumimos conocida la teoría de modelos básica de ultraproductos, ver [ChKe], en particular el lema de Łoz. Listaremos las definiciones, porque la construcción que consideraremos aquí permite incluir clases propias.

Def. 16.

a) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, un conjunto, y sea $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ una sucesión de τ-estructuras, para algún tipo τ (Si las $\mathcal{M}_i$ son clases propias, siempre que tengamos una sucesión así la supondremos una sola clase que las codifica apropiadamente). Supongamos que los $\mathcal{M}_i$ son conjuntos.

Para $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ una fórmula, decimos que $\varphi(f_1,\ldots,f_n)\mathcal{U}$-c.s. ($\mathcal{U}$-casi siempre), donde $f_1,\ldots,f_n \in \prod_i M_i$ sii $\{\,i : \mathcal{M}_i \models \varphi(f_1(i),\ldots,f_n(i))\,\} \in \mathcal{U}$ (Éste es un esquema de definición, i.e., una definición por cada φ, por los comentarios hechos previamente sobre la no definibilidad de $\models$; nótese que implícitamente se supone dada la sucesión $(\mathcal{M}_i)_i$). En particular, $f =_{\mathcal{U}} g$ sii $f = g\mathcal{U}$-c.s. Notación similar, que debería resultar autoexplicativa, será usada cuando resulte conveniente, incluso omitiendo $\mathcal{U}$ si es claro del contexto.

El *ultraproducto* de las $(\mathcal{M}_i)_i$, $\mathcal{N} = \prod_i \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$, es la τ-estructura de universo $\prod_i M_i/\mathcal{U} = \{\llcorner f \lrcorner : f \in \prod_i M_i\,\}$, donde $\llcorner f \lrcorner = \{g \in \prod_i M_i : f =_{\mathcal{U}} g\,\}$. Las relaciones, funciones y ctes. de τ se definen análogamente. Por ejemplo, si R es un símbolo de relación n-aria en τ,

$$R^{\mathcal{N}} = \{(\llcorner f_1 \lrcorner,\ldots,\llcorner f_n \lrcorner) : R(f_1,\ldots,f_n)\mathcal{U}\text{-c.s.}\,\}.$$

Es fácil ver que las relaciones (funciones) no dependen de los representantes de las clases $\llcorner\lrcorner$ de equivalencia escogidos. La construcción no requiere que $\mathcal{U}$ sea un ultrafiltro. En el caso general ($\mathcal{U}$ un filtro o, por dualidad, un ideal), no hablamos de ultraproductos sino de *productos reducidos.*

Si los $\mathcal{M}_i$ son todos iguales (a $\mathcal{M}$), $\mathcal{N}$ se escribe $\mathcal{M}^I/\mathcal{U}$, y se dice que es una *ultrapotencia.*

b) Sean $\mathcal{M}$ una clase propia y $\mathcal{U}$ un ultrafilto sobre un conjunto I. No podemos definir $\mathcal{M}^I/\mathcal{U}$ como antes, pues los $\llcorner f \lrcorner$ son clases propias.

Así, variamos ahora nuestra definición de $\llcorner f \lrcorner$, siguiendo a Scott [S]:

$$\llcorner f \lrcorner = \{\, g \in {}^I\mathcal{M} : f =_{\mathcal{U}} g \wedge \forall h \in {}^I\mathcal{M}\,(f =_{\mathcal{U}} h \rightarrow \operatorname{rank} g \leq \operatorname{rank} h)\,\}.$$

Es decir, truncamos el antiguo $\llcorner f \lrcorner$ en el mínimo V_α con quien tenga intersección no vacía. El resto de la definición procede como antes.

Hay una inmersión natural de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}^I/\mathcal{U}$:

$$\pi : x \mapsto c_x = \llcorner i \mapsto x \lrcorner.$$

Que π es, de hecho, una sumersión elemental, está contenido en el siguiente

Lema 10. *[Łoz] Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula en el lenguaje de tipo τ, $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ una sucesión de τ-estructuras, y $f_1, \ldots, f_n \in \prod_i M_i$.*

a) $\prod_i \mathcal{M}_i \models \varphi(\llcorner f_1 \lrcorner, \ldots, \llcorner f_n \lrcorner) \iff \varphi(f_1, \ldots, f_n)\,\mathcal{U}$-c.s.

b) *Si φ es una sentencia, $\prod_i \mathcal{M}_i \models \varphi \iff \{\, i : \mathcal{M}_i \models \varphi \,\} \in \mathcal{U}$. En particular, en el caso de una ultrapotencia, siempre tenemos equivalencia elemental.* $\square_{(\mathrm{L10})}$

(Ver [ChKe] o [Jel]). La demostración es por inducción es fórmulas, y el trabajar con clases propias no introduce ningún problema de consideración.

Corolario 4. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I y $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^I/\mathcal{U}$ es la inmersión natural, π es sumersión elemental.* $\square_{(\mathrm{C4})}$

Teorema 14. *Sean κ medible y $\mathcal{U}$ una medida sobre κ. Entonces $V^\kappa/\mathcal{U}$ (visto como una estructura $\langle M, E\rangle$) es bien fundamentado, extensional y como conjuntista.*

Dem: Por κ-completitud (de hecho, basta que $\mathcal{U}$ sea ω_1-completa, y puede mostrarse que esta condición es necesaria): Procedamos por contradicción, y sea $(\llcorner\varphi_n\lrcorner)_n$ E-decreciente.

Sea $A_n = \{\, \alpha < \kappa : \varphi_n(\alpha) \in \varphi_{n+1}(\alpha) \,\}$. Como $\forall n\, (A_n \in \mathcal{U})$ $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ (de hecho, está en $\mathcal{U}$), pero cualquier α en tal intersección origina una sucesión $\in$-decreciente de ordinales: $\left(\varphi_n(\alpha)\right)_n$.

La extensionalidad de E es por definición, y claramente es como conjuntista pues $\llcorner f \lrcorner E \llcorner g \lrcorner$ implica $\operatorname{rank}\llcorner f\lrcorner < \operatorname{rank}\llcorner g\lrcorner$. $\square_{(\mathrm{T14})}$

Por tanto, hay una única clase M transitiva que es isomorfa a $V^\kappa/\mathcal{U}$. *Dicha clase se denotará* $\mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$. Sean $i : V^\kappa/\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$ este isomorfismo, $\pi : V \to V^\kappa/\mathcal{U}$ la inmersión natural, y $j = i \circ \pi$. $j : V \xrightarrow{\prec} \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$ es la sumersión elemental asociada a $\mathcal{U}$. $\mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$ es un modelo interno, de modo que hay un primer ordinal que j mueve (a menos, claro, que j sea la identidad). Si $f \in {}^\kappa V$, sea $[f] = i(\llcorner f \lrcorner)$. Si hay posibilidad de confusión respecto al ultrafiltro con que estemos trabajando, subindicaremos con él la sumersión o las clases de equivalencia involucradas: $[f] = [f]_\mathcal{U}$, $j(\alpha) = j_\mathcal{U}(\alpha)$.

Teorema 15.

a. $\operatorname{crit} j = \kappa$.
b. ${}^\kappa\,\mathrm{Ult}(V,\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$.
c. $\mathcal{U} \notin \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$.
d. $2^\kappa \leq (2^\kappa)^{\mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})} < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

Dem: Sea $\mathcal{M} = \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$.

a. Procedamos por inducción. Supongamos que $\forall \beta < \alpha < \kappa\, (j(\beta) = \beta)$, y que $j(\alpha) > \alpha$. Entonces, si $[f] = \alpha$, $\{\, \beta : f(\beta) < \alpha \,\} \in \mathcal{U}$. Por κ-completitud, hay un $\gamma < \alpha$ con $\{\, \beta : f(\beta) = \gamma \,\} \in \mathcal{U}$. Entonces $[f] = j(\gamma) = \gamma$, una contradicción. Luego, $\operatorname{crit}(j) \geq \kappa$.

Como id_κ, la función identidad restringida a κ, satisface $\kappa \leq [\mathrm{id}_\kappa] < j(\kappa)$ $(\forall \alpha < \kappa\, \{\, \beta : \alpha < \mathrm{id}_\kappa(\beta) < \kappa \,\} \in \mathcal{U})$, tenemos lo querido.

b. Mostremos que si $j``x \in M$ y $y \subseteq M$ es t.q. $|y| \leq |x|$, entonces $y \in M$. Esto basta, pues $j``\kappa = \kappa \in M$. Sea $y = \{[f_z]\}_{z\in x} \subseteq M$. Basta ver que $h \in M$, donde $h \in {}^{j``x}y$ es la función $z \mapsto [f_z]$, es decir, tenemos que hallar una F t.q. $[F] = h$.

Sea f t.q. $[f] = j``x$, y definamos, para $\alpha \in \kappa$ y $z \in f(\alpha)$, $\operatorname{Dom} F(\alpha) = f(\alpha)$, y $F(\alpha)(z) = f_z(\alpha)$, si esto tiene sentido, o arbitrario si no. Como $j(z) \in [f]$ $(z \in x)$, $z \in f(\alpha)$ para casi todo α, de modo que esta F es como se buscaba.

c. Supongamos que $\mathcal{U} \in M$, y sea $g : {}^\kappa\kappa \to j(\kappa)$ la función sobreyectiva $g(f) = [f]$. Como ${}^\kappa\kappa, \mathcal{U} \in M$, $g \in M$, así que $\left(|j(\kappa)| \leq (2^\kappa)\right)^{\mathcal{M}}$. Esto es una contradicción, pues $\kappa < j(\kappa)$ y $j(\kappa)$ es inaccesible en $\mathcal{M}$.

d. Por b., $\mathcal{P}(\kappa) = \mathcal{P}^{\mathcal{M}}(\kappa)$, luego $2^\kappa \leq (2^\kappa)^{\mathcal{M}} < j(\kappa)$. La primera desigualdad porque $M \subseteq \mathrm{V}$, y la segunda porque $j(\kappa)$ es inaccesible en $\mathcal{M}$. Por último, $(|j(\kappa)| \leq 2^\kappa)^{\mathrm{V}}$. $\square_{(\mathrm{T15})}$

Hay un recíproco a la primera afirmación del teorema anterior:

Teorema 16.

a) *Si* $j : V \xrightarrow{\prec} M$ *entonces* $\operatorname{crit}(j) = \kappa$ *es medible, como* $\mathcal{U} = \{\, X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X) \,\}$ *atestigua.*

b) *Además, hay una sumersión natural* $k : \operatorname{Ult}(V, \mathcal{U}) \xrightarrow{\prec} M$ *que completa el diagrama (*$j_{\mathcal{U}}$ *es la sumersión asociada con* $\mathcal{U}$*):*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "j_{\mathcal{U}}"'] \arrow[dr, "j"] & \\ \operatorname{Ult}(V,\mathcal{U}) \arrow[rr, dashed, "k"] & & M \end{tikzcd}$$

Dem: a) Es fácil ver que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, obviamente no principal, y que $\kappa > \omega$ es un cardinal regular. Esto último pues $j(0) = 0$, $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$ —y por tanto κ es ordinal límite—, así que por inducción $j(n) = n$ si $n < \omega$, y $j(\omega) = \omega$ por ser ω definible. Nótese que si $\alpha < \kappa$, $X_\alpha = \kappa \setminus \alpha \in \mathcal{U}$, así que si $\operatorname{cf} \kappa < \kappa$ hay una sucesión $\delta_\alpha \to \kappa$ $(\alpha < \operatorname{cf} \kappa)$, y de $\emptyset = \bigcap_\alpha X_{\delta_\alpha}$ se sigue que

$$\kappa \in \bigcap_{\alpha < \operatorname{cf} \kappa} j(X_{\delta_\alpha}) = \bigcap_{\alpha < j(\operatorname{cf} \kappa)} j(X)_{j(\delta)_\alpha} = j\left(\bigcap_\alpha X_{\delta_\alpha}\right) = j(0) = 0,$$

una contradicción.

κ-completitud se demuestra análogamente.

b) Para $[f] \in \operatorname{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U})$ sea $k([f]) = j(f)(\kappa)$. Esto tiene sentido pues $\operatorname{Dom} j(f) = j(\kappa)$, así que $j(f)$ puede evaluarse en κ. Supongamos que $[f] = [g]$. Entonces $\{\, \alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha) \,\} \in \mathcal{U}$, que por definición implica $\kappa \in \{\, \alpha < j(\kappa) : j(f(\alpha)) = j(g(\alpha)) \,\}$. Luego, $j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa)$.

k es elemental, pues si φ es una fórmula y $\operatorname{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}) \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n])$, entonces

$$\{\, \alpha : \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)) \,\} = \{\, \alpha < \kappa : \mathrm{V} \models \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)) \,\} \in \mathcal{U}.$$

Luego, $\kappa \in \{\, \alpha < j(\kappa) : M \models \varphi(j(f_1(\alpha)), \ldots, j(f_n(\alpha))) \,\}$, y por tanto

$$M \models \varphi(k[f_1], \ldots, k[f_n]).$$

Finalmente, j factoriza como se indica pues si $x \in \mathrm{V}$, $j_{\mathcal{U}}(x) = [c_x]$. Así,

$$k \circ j_{\mathcal{U}}(x) = k[c_x] = j(c_x)(\kappa) = j(x),$$

pues $j(c_x)$ es la función de dominio $j(\kappa)$ identicamente $j(x)$. $\square_{(\mathrm{T16})}$

Debe notarse que éste es un esquema: un teorema por cada j. En el mismo sentido debe verse el segundo párrafo de la demostración de la parte b).

Aquí hemos encontrado 2 motivaciones claras y relacionadas entre sí para utilizar sumersiones elementales en la definición de cardinales grandes: κ es medible sii es el punto crítico de una sumersión elemental. Si a ésta se le exigen propiedades adicionales, κ *debería* ser más grande.

Por ejemplo, por inducción es fácil ver que si $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U})$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, entonces $\mathrm{V}_{\kappa+1} \in \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U})$. De hecho, $j \restriction \mathrm{V}_\kappa = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_\kappa}$, $\mathrm{V}_{\kappa+1}^{\mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U})} = \mathrm{V}_{\kappa+1}$ y $(\kappa^+)^{\mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U})} = \kappa^+$. Además, ${}^{\kappa}\,\mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U})$, pero la afirmación correspondiente con κ^+ es falsa, o $\kappa < j(\kappa)$ pero $j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

Dos generalizaciones naturales para $j : \mathrm{V} \to M$ pueden ser

(1) Hacer $j(\kappa)$ arbitrariamente grande (dado λ, hallar j con $j(\kappa) > \lambda$).

(2) Hacer M suficientemente ancho (dado λ, hallar j con rango M tal que ${}^{\lambda}M \subseteq M$).

Además, puede aumentarse el rango donde j es la identidad. Intuitivamente, los modelos internos son 'delgados', evitando así la presencia de conjuntos patológicos o muy 'complejos', de modo que tienen una teoría que puede entenderse relativamente bien y permite a la vez entender mejor la estructura de V mismo. Volveremos a estas ideas más adelante.

Mencionemos ahora una aplicación, relacionada con el tamaño de los medibles: Si κ es medible, es el κ-ésimo inaccesible: Sea j como arriba. Nótese que si C es club en κ, $j(C)$ lo es en $j(\kappa)$, pero $C \subseteq j(C)$, así que $\kappa \in j(C)$. Tomando $C = C_\alpha = \{\lambda < \kappa : \lambda > \alpha \text{ es límite fuerte}\}$, $R = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es regular}\}$, $\kappa \in j(R) \cap j(C_\alpha) = j(R \cap C_\alpha)$. Entonces $R \cap C_\alpha \neq \emptyset$, y por tanto los inaccesibles son cofinales en κ.

Teorema 17. *Sean κ medible, $\mathcal{U}$ una medida sobre κ y $j : V \xrightarrow{\prec} \mathcal{M} = \mathrm{Ult}(V, \mathcal{U})$ la sumersión asociada.*

a. *Si λ es límite, $\mathrm{cf}\,\lambda = \kappa$, $j(\lambda) > \mathrm{lím}_{\alpha<\lambda}\, j(\alpha)$. Si $\mathrm{cf}\,\lambda \neq \kappa$, entonces $j(\lambda) = \mathrm{lím}_\alpha\, j(\alpha)$.*

b. *Si $\lambda > \kappa$ es límite fuerte, $\mathrm{cf}\,\lambda \neq \kappa$, entonces $j(\lambda) = \lambda$. Si $\mathrm{cf}\,\lambda = \kappa$, $2^\lambda < j(\lambda)$.*

c. *Sea $(\aleph'_\alpha)_\alpha$ la sucesión de puntos fijos de la función $\aleph$. Si, por ejemplo, $\lambda = \aleph'_{\kappa+\kappa}$ es límite fuerte, $2^\lambda < \aleph'_{(2^\kappa)^+}$.*

Dem: a. El problema siempre es determinar si hay una función $f : \kappa \to \lambda$ con $\mathrm{lím}_{\alpha<\lambda}\, j(\alpha) \leq [f] < j(\lambda)$. Si $\mathrm{cf}\,\lambda = \kappa$, sea $(\lambda)_\alpha$ una κ-sucesión creciente y cofinal en λ. Tomemos $f : \alpha \mapsto \lambda_\alpha$.

Si $cf\lambda > \kappa$, toda $f : \kappa \to \lambda$ es acotada. Si $\mathrm{cf}\,\lambda < \kappa$ y $f : \kappa \to \lambda$, para casi todo γ $f(\gamma) < \beta$ para algún $\beta < \lambda$, por κ-completitud.

b. Si $\alpha < \lambda$, $j(\alpha) < \lambda$ pues $|j(\alpha)| \leq |{}^{\kappa}\alpha| < \lambda$ por hipótesis, ya que todo ordinal $<\supset$ (a) es representable por un elemento de ${}^{\kappa}\alpha$. Si $\mathrm{cf}\,\lambda \neq \kappa$, entonces $\lambda \geq \mathrm{lím}_{\alpha<\lambda}\, j(\alpha) = j(\lambda) \geq \lambda$.

Si $\mathrm{cf}\,\lambda = \kappa$, como λ es límite fuerte, $2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} = \lambda^\kappa \leq (\lambda^\kappa)^{\mathcal{M}}$ porque ${}^{\kappa}M \subseteq M$. Pero $(\lambda^\kappa)^{\mathcal{M}} \leq (\lambda^{j(\kappa)})^{\mathcal{M}}$, y $j(\lambda)$ es límite fuerte en $\mathcal{M}$, así que $\left(\lambda^{j(\kappa)} < j(\lambda)\right)^{\mathcal{M}}$.

c. El resultado se sigue de b. porque $j(\lambda) = j(\aleph'_{\kappa+\kappa}) = (\aleph'_{j(\kappa)+j(\kappa)})^{\mathcal{M}} \leq \aleph'_{j(\kappa)+j(\kappa)} < \aleph'_{(2^\kappa)^+}$. $\square_{(\mathrm{T17})}$

a.γ. Ultrafiltros Normales.

Def. 17. Un filtro $\mathcal{U}$ sobre κ es *normal* sii es cerrado bajo intersecciones diagonales de tamaño κ. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, esto equivale a decir que cada vez que la unión diagonal de una κ-sucesión de subconjuntos de κ está en $\mathcal{U}$ algún elemento de la sucesión está.

Lema 11. *Sea $\mathcal{U}$ una medida sobre κ. Sean $j : V \xrightarrow{\preceq} \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$ la sumersión asociada, y $\mathcal{M} = \mathrm{Ult}(V,\mathcal{U})$. Son equivalentes:*

a) *$\mathcal{U}$ es normal.*
b) *Si f es regresiva $\mathcal{U}$-c.s., $\exists\gamma < \kappa\,(f(\alpha) = \gamma$ para casi todo $\alpha)$.*
c) *En $\mathcal{M}$ $\kappa = [id_\kappa]$.*
d) *$\mathcal{U} = \{\, X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X) \,\}$.*

Además, en caso de que $\mathcal{U}$ sea normal,

a. *$M = \{\, j(f)(\kappa) : f \in {}^\kappa V \,\}$.*
b. *En el Teorema 16, si $M = \mathrm{Ult}(V,\mathcal{D})$ para $\mathcal{D}$ una medida normal sobre κ, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{D}$ y κ es la identidad.*

Así, los ultrafiltros normales brindan información adicional sobre el modelo interno asociado con las sumersiones que generan.

Dem: a) $\to$ b). Primero, como en la demostración usual del lema de Fodor, si $\mathcal{U}$ es normal y $f^{-1}(\{\alpha\})$ no intersecta a todos los elementos de $\mathcal{U}$ para ningún $\alpha < \kappa$, donde $f : X \to \kappa$ es regresiva ($X \in \mathcal{U}$), entonces $\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{U}$, y

$$X \cap \dot{\Delta}_\alpha(\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\})) = \emptyset, \quad \text{una contradicción.}$$

Entonces $f^{-1}(\{\alpha\})$ intersecta a todos los elementos de $\mathcal{U}$, para algún $\alpha < \kappa$, lo que implica trivialmente que pertenece a $\mathcal{U}$.

b) $\to$ c). Si $\kappa < [\mathrm{id}_\kappa]$ y $[f] = \kappa$, $f(\alpha) < \alpha$ para casi todo α, y por tanto $[f] = \beta$ para algún $\beta < \kappa$, contradicción.

c) $\to$ d). Sea $X \subseteq \kappa$. $X \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{\, \beta : \beta \in X \,\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{\, \beta : \mathrm{id}_\kappa(\beta) \in X \,\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow [\mathrm{id}_\kappa] \in j(X) \leftrightarrow \kappa \in j(X)$.

d) $\to$ a). Supongamos que los X_ξ son subconjuntos de κ, y que $\bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi \setminus (\xi+1) \in \mathcal{U}$. Entonces $\kappa \in j\left(\bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi \setminus (\xi+1)\right) = \bigcup_{\xi<j(\kappa)} j(X)_\xi \setminus (j(\xi)+1)$.

Pero $\kappa \in j(\xi)$ sii $\kappa \leq \xi$, así que

$$\kappa \in \bigcup_{\xi<\kappa} j(X)_\xi = \bigcup_{\xi<\kappa} j(X_\xi).$$

Entonces hay un $\xi < \kappa$ con $\kappa \in j(X_\xi)$, es decir, con $X_\xi \in \mathcal{U}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}$ es normal. Si $x \in \mathcal{M}$, $x = [f]$ para alguna $f \in {}^{\kappa}\mathrm{V}$. Entonces $j(f)(\kappa) = j(f)([\mathrm{id}_\kappa])$. Pero obviamente $\{\alpha : f \circ \mathrm{id}_\kappa(\alpha) = f(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, así que $j(f)([\mathrm{id}_\kappa]) = [f]$.

Además, si en el Teorema 16 $\mathcal{D}$ es normal en κ y $M = \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{D})$, $\mathcal{U} = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\} = \mathcal{D}$, y $k[f] = j(f)(\kappa) = [f]$. $\square_{(\mathrm{L11})}$

La utilidad de este resultado radica en el siguiente hecho:

Corolario 5. *Si κ es medible, hay una medida normal sobre κ.*

Dem: Sea κ medible con $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} \mathcal{M}$ un testigo. $\mathcal{U} = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ es normal. $\square_{(\mathrm{C5})}$

Como aplicación, casi todos los cardinales $< \kappa$ son inaccesibles, Mahlo, etc. (κ es *Mahlo* sii $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es inaccesible}\}$ es estacionario), pues si $\mathcal{U}$ es normal en κ,

$$\mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}) \models [\mathrm{id}_\kappa] \text{ es inaccesible},$$

así que los inaccesibles tienen medida 1. κ es Mahlo, pues (razonando como luego del Teorema 16) si C es club en κ y $X = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es inaccesible}\}$, $\kappa \in j(X) \cap j(C) = j(X \cap C)$, de modo que $X \cap C \neq \emptyset$.

Luego, $\mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}) \models [\mathrm{id}_\kappa]$ es Mahlo, y los Mahlos bajo κ tienen medida 1. Entonces es 2-Mahlo (los Mahlos son estacionarios en κ), 3-Mahlo, ... De hecho, κ es κ-Mahlo (α-Mahlo para todo $\alpha < \kappa$). Estos son argumentos de tipo reflexión: Como κ tiene la propiedad P, muchos cardinales bajo κ deben tenerla. Por ejemplo, toda propiedad (de cardinales grandes) que se preserve hacia abajo. Este proceso, claro está, tiene un límite: κ no necesariamente es medible en $\mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U})$. Incluso, Solovay mostró que $\forall \kappa$ medible $\exists \mathcal{U}$ normal en κ ($\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ no es medible}\} \in \mathcal{U}$).

El siguiente resultado es puramente combinatorio y será usado en el próximo capítulo al trabajar con forcing de Prikry:

Def. 18. κ es Ramsey sii $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$, es decir sii para toda $f : [\kappa]^{<\omega} \to 2$ hay un $X \subseteq \kappa$ homogéneo para f en el sentido de que $\forall n < \omega \left(\left|f``[X]^n\right| = 1\right)$.

Si κ es Ramsey, $\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es } \lambda\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ.

Lema 12. *[Rowbottom. 1964] Los cardinales medibles son Ramsey. De hecho, si $\gamma < \kappa$, $\mathcal{U}$ es normal en κ y $f : [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$, hay un $Y \in \mathcal{U}$ homogéneo para κ.* $\square_{(\mathrm{L12})}$

Para una demostración ver [ChKe] o [K].

b. Compacidad Fuerte.

El concepto que trataremos en esta sección apareció originalmente en un contexto completamente diferente del de sumersiones elementales: lógica infinitaria. En [KeTa] se discute una equivalencia puramente combinatoria que nos resultará más aplicable.

Def. 19.

(1) Sea $\kappa \geq \lambda$. $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ es el lenguaje que consta de κ variables y (dado un tipo τ de primer orden) se construye recursivamente a partir de las fórmulas atómicas

mediante conjunciones y disyunciones de $< \kappa$ fórmulas, o cuantificación (existencial o universal) de $< \lambda$ variables, permitiendo en cada caso $< \lambda$ variables libres. Aunque no lo necesitaremos aquí, esta definición puede formalizarse de modo que sea válido razonar por inducción en fórmulas.

(2) κ es *fuertemente compacto* sii $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface κ-compacidad: Todo conjunto Σ de sentencias t.q. todo $S \subseteq [\Sigma]^{<\kappa}$ es satisfactible, es a su vez satisfactible.

No nos valdremos de esta definición, dada sólo por completitud histórica. Para las equivalencias que usaremos requerimos introducir otro concepto:

Def. 20. Sea $\lambda \geq \kappa$.

(1) Si $P \in [\lambda]^{<\kappa}$, $\hat{P} = \{ Q \in [\lambda]^{<\kappa} : P \subseteq Q \}$.

(2) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $[\lambda]^{<\kappa}$. $\mathcal{U}$ es *fino* sii es κ-completo (no principal) y $\forall \alpha < \lambda \, \alpha \in \mathcal{U}$.

(3) κ es λ-*compacto* sii hay es mayor que ω y hay un ultrafiltro fino sobre $[\lambda]^{<\kappa}$.

Nótese que κ es medible sii es κ-compacto, y que si $\rho \geq \lambda \geq \kappa$ y κ es ρ-compacto, entonces es λ-compacto. Además, si $\mathcal{U}$ es fino sobre $[\lambda]^{<\kappa}$ y $P \in [\lambda]^{<\kappa}$, $\hat{P} \in \mathcal{U}$. En efecto, basta notar que $\widehat{\{\alpha\}} \in \mathcal{U} \, \forall \alpha < \lambda$, y recordar que $\mathcal{U}$ es κ-completo.

Teorema 18. *Si $\omega < \kappa \leq \lambda$ y κ es regular, son equivalentes:*

a) *κ es λ-compacto.*

b) *Hay una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ t.q. si $X \subseteq M$, $|X| \leq \lambda$, entonces hay un $Y \in M$ con $X \subseteq Y$, $|Y| \leq 2^{\lambda^{<\kappa}}$ y $M \models |Y| < j(\kappa)$. Además,*

$$2^{\lambda} < j(\kappa) \leq j(\lambda) < \left(2^{\lambda^{<\kappa}}\right)^{+}.$$

c) *Todo filtro $\mathcal{F}$ κ-completo sobre un conjunto I, generado por $\leq \lambda$ conjuntos, puede extenderse a un ultrafiltro κ-completo sobre I.*

Dem: a) $\to$ b). Comencemos notando que la construcción de *a.β.* generaliza de manera natural a este contexto, de modo que si $\mathcal{U}$ es fino sobre $[\lambda]^{<\kappa}$, hay una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M = \mathrm{Ult}(V, \mathcal{U})$, y $\mathrm{crit}\, j = \kappa$, con la misma prueba que antes.

$j(\lambda) < \left(2^{\lambda^{<\kappa}}\right)^{+}$: Si $[f] < j(\lambda)$, s.p.d.g. $\mathrm{Ran}\, f \subseteq \lambda$, así que $|j(\lambda)| \leq \left|{}^{\lambda^{<\kappa}}\lambda\right| = 2^{\lambda^{<\kappa}}$.

$2^{\lambda} < j(\kappa)$: Sea $g \in {}^{[\lambda]^{<\kappa}}V$ la función dada por $g(x) = \mathcal{P}(x)$. Como κ es fuertemente inaccesible (ya que por lo menos es medible), hay una $h \in {}^{[\lambda]^{<\kappa}}V$ t.q. $\forall x \in [\lambda]^{<\kappa} \, \exists \mu < \kappa \left(h(x) : \mathcal{P}(x) \to \mu \text{ es una biyección}\right)$. Entonces $[h] : [g] \to \rho$ es una biyección, para algún $\rho < j(\kappa)$. Para $A \subseteq \lambda$ sea

$$\begin{aligned} f_A : [\lambda]^{<\kappa} &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto A \cap x \end{aligned}.$$

Entonces $[f_A] \in [g]$, y si $A \neq B$, como α atestigua, digamos $\alpha \in A \setminus B$, $\{ x : \alpha \in f_A(x) \setminus f_B(x) \} = \{ x : \alpha \in (A \cap x) \setminus B \} = \{ x : \alpha \in x \} \in \mathcal{U}$, así que $j(\alpha) \in [f_A] \setminus [f_B]$, y $A \mapsto [f_A]$ es 1-1. Luego, $2^{\lambda} \leq [g] < j(\kappa)$.

Sean $X = \{ [f_\alpha] : \alpha < \lambda \} \subseteq M$ y $Z \in {}^{[\lambda]^{<\kappa}}V : x \mapsto \{ f_\alpha(x) : \alpha \in x \}$. Sea $Y = [Z]$. Trivialmente (por Łoz) $X \subseteq Y$ y $\left(|Y| < j(\kappa)\right)^{M}$ $\left(|Z(x)| \leq |X| < \kappa\right)$, pero entonces hay una inyección $\varphi : Y \to j(\kappa)$, y por tanto una de Y en $2^{\lambda^{<\kappa}}$.

b) $\to$ c). Sea $\mathcal{F}$ como en la hipótesis, $\mathcal{F}$ generado por $F \in [I]^{\leq\lambda}$. Por b), hay un $Y \supseteq j``F$ con $Y \in M$ y $M \models |Y| < j(\kappa)$. En M $j(\mathcal{F})$ es un filtro $j(\kappa)$-completo, y $|j(\mathcal{F}) \cap Y| < j(\kappa)$. Así, hay un $c \in M$ con $c \in \bigcap(j(\mathcal{F}) \cap Y)$. Sea $\mathcal{U} = \{ X \subseteq I : c \in j(X) \}$. $\mathcal{U}$ es como se pide.

c) $\to$ a). Considérese el filtro en $[\lambda]^{<\kappa}$ generado por $\{ \{\alpha\}\hat{} : \alpha < \lambda \}$. $\square_{(\mathrm{T18})}$

Teorema 19. *Sea $\kappa > \omega$ regular. Los siguientes son equivalentes:*

1) *$\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ satisface κ-compacidad.*
2) *κ es fuertemente compacto.*
3) *κ es λ-compacto $\forall\lambda \geq \kappa$.*

Dem: 1) $\to$ 2). Trivial.

2) $\to$ 3). Sea $\mathcal{F}$ un filtro κ-completo sobre I. Sea Σ la unión de la $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$-teoría de $\langle I, X \rangle_{X \subseteq I}$ (cada X visto como una relación 1-aria) con $\{ X(\underline{c}) : X \in \mathcal{F} \}$, donde $\underline{c}$ es una nueva cte. Por κ-completitud de $\mathcal{F}$ y 2), Σ tiene un modelo $\mathcal{M} = \langle M, X^{\mathcal{M}}, c \rangle_{X \subseteq I}$. Entonces $\{ X \subseteq I : \mathcal{M} \models X[c] \} = \mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo que extiende a $\mathcal{F}$:

$\mathcal{U}$ es un filtro pues en Σ está la sentencia $\forall x\,(X(x) \to Y(x))$ para todo $X \subseteq Y$. Es ultrafiltro pues Σ contiene la sentencia $\forall x\,((X \cup Y)(x) \to X(x) \vee Y(x))$ para cada $X, Y \in [\lambda]^{<\kappa}$.

$\mathcal{U}$ es κ-completo ya que si $\alpha < \kappa$ y $(X_\beta)_{\beta<\alpha}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{U}$, $X = \bigcap_\beta X_\beta \in \mathcal{U}$ pues

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_\beta X_\beta[c] \longrightarrow X[c].$$

3) $\to$ 1). Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ un conjunto de sentencias t.q. para todo $S \in [\Sigma]^{<\kappa}$ hay un modelo $\mathcal{M}_S$ de S. Queremos ver que Σ tiene un modelo. Sea $\mathcal{U}$ una medida fina sobre $[\Sigma]^{<\kappa}$ (que existe módulo una biyección entre $|\Sigma|$ y Σ. S.p.d.g., $|\Sigma| \geq \kappa$, o lo buscado es obvio), y sea $\mathcal{M} = \prod_S \mathcal{M}_S/\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es κ-completa, es fácil verificar que vale el teorema de Łoz para $\mathcal{M}$, $(\mathcal{M}_S)_S$. Si $\varphi \in \Sigma$, $\{\varphi\}\hat{} \in \mathcal{U}$. Como $\{ S \in [\Sigma]^{<\kappa} : \mathcal{M}_S \models \varphi \} \supseteq \{\varphi\}\hat{}$, $\mathcal{M} \models \varphi$, y $\mathcal{M}$ es modelo de Σ. $\square_{(\mathrm{T19})}$

Observación. El concepto de compacidad fuerte *claramente* es más fuerte que el de medible. Es un teorema de Vopěnka y Hrbáček que esto sí es así: ellos mostraron que $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}[A]$ para cualquier conjunto A si hay un fuertemente compacto, pero el modelo de [Ku1] satisface $\mathrm{V} = \mathrm{L}[\mathcal{U}]$ para cierto $\mathcal{U}$, si hay un medible (que aun es medible en el modelo), y en [Ku2] Kunen muestra que si hay un fuertemente compacto, $\forall\lambda$ hay un modelo interno con λ medibles.

Como parte de su demostración, estableció que si κ es fuertemente compacto y $\delta < (2^\kappa)^+$, hay una medida $\mathcal{U}$ sobre κ t.q. $j_{\mathcal{U}}(\kappa) > \delta$. Recuérdese que $j_{\mathcal{U}}(\kappa) < (2^\kappa)^+$, cf. Teorema 15. El concepto de supercompacidad, tema de la siguiente sección, generaliza esta idea.

c. Cardinales Supercompactos y Mayores.

Los cardinales supercompactos fueron introducidos por Solovay y Reinhardt como generalizaciones del concepto de compacidad fuerte. Recuérdese que si κ es medible y P es una propiedad de κ que se preserva hacia abajo, entonces κ *refleja* P, en el sentido de que

$\exists\alpha < \kappa\, P(\alpha)$. De hecho, si $\mathcal{U}$ es normal en κ, $\{\, \alpha < \kappa : P(\alpha) \,\} \in \mathcal{U}$, y aquí se usó de manera esencial que $\mathcal{U}$ era normal (pues $\kappa = [\mathrm{id}_\kappa]_{\mathcal{U}}$).

Sería natural investigar cómo se fortalece el concepto de compacidad fuerte (qué propiedades de reflexión adquiere) exigiendo normalidad de los ultrafiltros involucrados.

Def. 21. Sea $\kappa \leq \lambda$.

(1) Un ultrafiltro fino $\mathcal{U}$ sobre $[\lambda]^{<\kappa}$ es *normal* sii es cerrado bajo intersecciones diagonales: Si $(P_\alpha)_{\alpha \in \lambda} \in {}^\lambda\mathcal{U}$ entonces

$$\triangle_{\alpha \in \lambda} P_\alpha = \{\, x \in [\lambda]^{<\kappa} : x \in \bigcap_{\alpha \in x} P_\alpha \,\} \in \mathcal{U}.$$

Equivalentemente, $\mathcal{U}$ es normal sii toda $f : [\lambda]^{<\kappa} \to \lambda$ regresiva $\mathcal{U}$-c.s. es constante $\mathcal{U}$-c.s.

(2) κ es *λ-supercompacto* sii hay una medida normal sobre $[\lambda]^{<\kappa}$.

(3) κ es *supercompacto* sii es λ-supercompacto $\forall\lambda \geq \kappa$.

Así, λ-supercompacidad de κ implica λ-compacidad, y es fácil ver que si $\mathcal{U}$ es normal sobre $[\kappa]^{<\kappa}$ entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{P}(\kappa)$ es normal sobre κ, así que el concepto introducido generaliza el original.

Observación. Si κ es medible, hay una medida normal sobre κ, así que cabe preguntarse si supercompacidad es realmente un concepto más exigente que compacidad fuerte. De trabajos de Menas y Magidor se sigue que sí: Si κ es 2^κ-supercompacto, hay una medida normal sobre κ que contiene a $\{\, \alpha < \kappa : \alpha \text{ es medible} \,\}$ (de hecho, hay 2^{2^κ}). Pero es consistente que el primer fuertemente compacto sea también el primer medible. Por supuesto, si κ es supercompacto, es fuertemente compacto, aunque no puede mostrarse mucho más allá: Es consistente que el primer supercompacto sea de hecho el primer fuertemente compacto.

La pregunta correspondiente en consistencia aun está abierta:

Pregunta 1.

$$¿\ \mathrm{Con}(\exists\kappa\,(\kappa \text{ es fuertemente compacto})) \longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\kappa\,(\kappa \text{ es supercompacto}))\ ?$$

La definición dada no menciona sumersiones elementales directamente. Hay una equivalencia, que exige cuantificar sobre clases, pero responde a algunas de las sugerencias mencionadas luego del Teorema 16:

Teorema 20. *κ es λ-supercompacto sii hay una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ t.q.* $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, *$\lambda < j(\kappa)$ y ${}^\lambda M \subseteq M$.*

Surge la pregunta de cómo formalizar esta afirmación en ZFC. En una redacción un tanto menos agradable podríamos decir, en una dirección: Si κ es λ-supercompacto, y $\mathcal{U}$ es testigo, la sumersión asociada con $\mathcal{U}$ satisface las hipótesis de arriba; en la otra, tendríamos un esquema, una frase por cada posible j. O podríamos trabajar directamente en MK. Comentarios similares valen para cuanto sigue.

Dem: ⌜→⌟ Como ya insinuamos en el párrafo pasado, basta mostrar que si $\mathcal{U}$ es normal sobre $[\lambda]^{<\kappa}$, $j_{\mathcal{U}}$ es como se pide:

$[\mathrm{id}_{[\lambda]^{<\kappa}}] = j``\lambda$: $j``\lambda \subseteq [\mathrm{id}_{[\lambda]^{<\kappa}}]$ pues $\mathcal{U}$ es fina. Para la otra dirección, nótese que si $[f] \in [\mathrm{id}_{[\lambda]^{<\kappa}}]$ entonces $f(x) \in x\,\mathcal{U}$-c.s., y por tanto $f(x) = \alpha \in \lambda$ para algún $\alpha\,\mathcal{U}$-c.s., así que $[f] = j(\alpha)$.

${}^{\lambda}M_{\mathcal{U}} \subseteq M_{\mathcal{U}}$ se sigue con una sencilla modificación del argumento en la demostración de b. del Teorema 15 (pero es necesario usar la normalidad de $\mathcal{U}$). $\mathrm{crit}\, j = \kappa$ es por κ-completitud: $\mathrm{crit}\, j \geq \kappa$ y $j(\kappa) > \lambda$. En efecto, $\{\, x : \|x\| < \kappa \,\} \in \mathcal{U}$, así que en M $j(\kappa) > \|[\mathrm{id}_{[\lambda]^{<\kappa}}]\| = \|j``\lambda\| = \lambda$. Acá, $\|x\|$ es su tipo de orden.

⌞←⌝ Dada $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ como en la hipótesis, definiendo

$$\mathcal{U} = \{\, x \in [\lambda]^{<\kappa} : j``\lambda \in j(x) \,\},$$

$\mathcal{U}$ es testigo de la λ-supercompacidad de κ. En efecto, de $\|j``\lambda\| = \lambda < j(\kappa)$ en $M$, se sigue que $j``\lambda \in \left([j(\lambda)]^{<j(\kappa)}\right)^M$, y $[\lambda]^{<\kappa} \in \mathcal{U}$.

Es fácil ver que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo, exactamente como en el caso de que κ fuese sólo medible. Que es fino se sigue de que si $\alpha < \lambda$, $j(\alpha) \in j``\lambda$, así que $j``\lambda \in \{j(\alpha)\}\hat{} = j\left(\{\alpha\}\hat{}\right)$. Luego, $\{\alpha\}\hat{} \in \mathcal{U}$. Para normalidad, supongamos que $f : [\lambda]^{<\kappa} \to \lambda$ es regresiva. Entonces $j(f) : \left([j(\lambda)]^{<j(\kappa)}\right)^M \to j(\lambda)$ es regresiva en M, así que $j(f)(j``\lambda) \in j``\lambda$, y existe un $\alpha < \lambda$ con $j(f)(j``\lambda) = j(\alpha)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} j``\lambda &\in \{\, x \in j([\lambda]^{<\kappa}) : j(f)(x) = j(\alpha) \,\} \\ &= j\left(\{\, x \in [\lambda]^{<\kappa} : f(x) = \alpha \,\}\right), \end{aligned}$$

así que f es cte. (e igual a α) $\mathcal{U}$-c.s. $\square_{\text{(T20)}}$

Los supercompactos presentan propiedades de reflexión más fuertes que las de los medibles, como habíamos supuesto. En particular:

Teorema 21. *Sea κ supercompacto.*

a) *$V_\kappa \prec_2 V$, es decir, toda fórmula Σ_2^{ZFC} es absoluta para V_κ (y por tanto, toda fórmula Π_3^{ZFC} se preserva hacia abajo de V a V_κ).*

b) $\forall \eta > \kappa\, \exists \alpha < \kappa, j : V_\alpha \xrightarrow{\prec} V_\eta$ $(\mathrm{crit}\, j = \delta$ y $j(\delta) = \kappa)$.

La conclusión de b) de hecho equivale a supercompacidad.

Dem: a) Supongamos $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists \vec{y}\, \psi(\vec{x}, \vec{y})$, donde ψ es Π_1. Si $\vec{a} \in \mathrm{V}_\kappa$ y $\varphi[\vec{a}]$, sea $\vec{b}$ un testigo, y (por supercompacidad) tomemos $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $\vec{b} \in \mathrm{V}^M_{j(\kappa)}$ ($\vec{b} \in \mathrm{V}_\lambda$ para algún λ; basta tomar j testigo de la $|\mathrm{V}_\lambda|$-supercompacidad de κ). Como $j(\vec{a}) = \vec{a}$, $\left(\mathrm{V}_{j(\kappa)} \models \varphi[\vec{a}]\right)^M$, pues ψ es Π_1.

Entonces $\mathrm{V}_\kappa \models \varphi[\vec{a}]$.

Para el recíproco, si φ es como arriba, $\mathrm{V}_\kappa \models \varphi[\vec{a}]$ y $\vec{b}$ es un testigo, $\mathrm{V}_\kappa \models \psi[\vec{a}, \vec{b}]$. Si $\neg\psi[\vec{a}, \vec{b}]$, como ψ es Π_1, $\neg\psi$ es Σ_1, y por el Lema 9, de Levy, se preserva hacia abajo en los H_κ. Como κ es inaccesible, $H_\kappa = \mathrm{V}_\kappa$, y tenemos una contradicción.

b) Sea $\eta > \kappa$ y $j : V \xrightarrow{\prec} M$ testigo de la $|V_\eta|$-supercompacidad de κ. Entonces $j \restriction_{V_\eta}: V_\eta \xrightarrow{\prec} V^M_{j(\eta)}$. Como ${}^{|V_\eta|}M \subseteq M$, por inducción se tiene que si $\beta \leq \eta$ entonces $V_\beta = V^M_\beta \in M$, así que $j \restriction_{V_\eta} \in M$. Luego,

$$M \models \exists \alpha < j(\kappa), \pi : V_\alpha \xrightarrow{\prec} V_{j(\eta)} \,(\mathrm{crit}\,\pi = \delta \wedge \pi(\delta) = j(\kappa)).$$

Por elementaridad tenemos lo querido. $\square_{(\mathrm{T21})}$

Concluimos con una exploración rápida de las hipótesis por encima de supercompacidad. Éste ha sido sin duda el concepto más estudiado luego del de medibilidad. Sus extensiones se aproximan rápidamente a la inconsistencia. El último resultado de esta sección es, precisamente, el establecimiento por parte de Kunen de un límite a cuánto más puede pedirse.

Def. 22.

(1) Si $\eta > 0$, κ es *η-extendible* sii $\exists \xi, j : V_{\kappa+\eta} \xrightarrow{\prec} V_\xi$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ y $\kappa + \eta < j(\kappa) < \xi$. κ es *extendible* sii es η-extendible $\forall \eta > 0$.

(2) κ es *λ-huge* sii $\exists j : V \xrightarrow{\prec} M$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, ${}^{j^\lambda(\kappa)}M \subseteq M$ [j^α es la α-ésima iteración de j. Así, 0-huge es medible]. κ es *huge* sii es 1-huge.

(3) κ es *superhuge* sii $\forall \lambda \, \exists j : V \xrightarrow{\prec} M$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$ y $\lambda < j(\kappa)$.

Como con supercompacidad, hay formulaciones equivalentes, en términos de ultrafiltros, formalizables en ZFC. El siguiente teorema (para demostraciones, ver [Bo], [K] y [KReSo]) incluye algunos de los resultados principales acerca de estos cardinales y su relación con los supercompactos.

Teorema 22.

a) *Si κ es $|V_{\kappa+\eta}|$-supercompacto, con $\eta < \kappa$, entonces hay una medida $\mathcal{U}$ normal sobre κ t.q.*

$$\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es } \eta\text{-extendible}\} \in \mathcal{U}.$$

b) *Si κ es η-extendible y $\delta + 5 \leq \eta$, entonces κ es $|V_{\kappa+\delta}|$-supercompacto.*

c) *Si κ es extendible, $V_\kappa \prec_3 V$.*

d) *Si κ es superhuge, entonces es extendible, y hay una medida $\mathcal{U}$ normal sobre κ con*

$$\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es extendible}\} \in \mathcal{U}.$$

e) *Si κ es 2-huge, hay una medida normal $\mathcal{U}$ sobre κ t.q.*

$$\{\alpha < \kappa : V_\kappa \models \alpha \text{ es superhuge}\} \in \mathcal{U}. \quad \square_{(\mathrm{T22})}$$

Con estos cardinales obtenemos sumersiones cada vez más y más 'gruesas'. Sería deseable, p.ej., conseguir incluso $j : V \xrightarrow{\prec} V$. Kunen [Ku3] mostró que esto no era posible:

Teorema 23. *[Kunen]*

a) *No hay cardinales ω-huge.*

b) *Para ningún δ hay una $j : V_{\delta+2} \xrightarrow{\prec} V_{\delta+2}$.*

c) *No existe $j : V \xrightarrow{\prec} V$.*

d) *κ es λ-supercompacto sii $\exists j : V \xrightarrow{\prec} M$ t.q.* $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ *y* ${}^{\lambda}M \subseteq M$.

Dem: Sea j : V $\xrightarrow{\prec} M$ con $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, y sea $\lambda = j^{\omega}(\kappa) = \mathrm{Sup}_n\, j^n(\kappa)$. Nótese que $j(\lambda) = \mathrm{Sup}_n\, j^{n+1}(\kappa) = \lambda$ es límite fuerte (κ es inaccesible) de cofinalidad ω.

Sean $F : [\lambda]^{\omega} \to \lambda$ ω-Jónsson para λ (ver Teorema 5), $A = j``\lambda$. Si $A \in M$, por elementaridad hay un $s \in M \cap [A]^{\omega}$ con $\big(j(F)\big)(s) = \kappa$. Pero (identificando s con su enumeración creciente) $s = j(t)$ para un t con $j\big(t(n)\big) = s(n)$, así que

$$\kappa = j(F)j(t) = j\big(F(t)\big) \in A,$$

una contradicción.

a) y c) se siguen de inmediato.

Si $j : \mathrm{V}_{\delta+2} \xrightarrow{\prec} \mathrm{V}_{\delta+2}$ ($j \neq \mathrm{id}_{\mathrm{V}_{\delta+2}}$), como δ es definible, $j(\delta) = \delta$. Luego, $\kappa = \mathrm{crit}(j) < \delta$, así que $j^n(\kappa) < \delta\, \forall n < \omega$, y $\lambda = \mathrm{Sup}_n\, j^n(\kappa) \leq \delta$. Si F es ω-Jónsson para λ, $F \in \mathrm{V}_{\delta+2}$, y el argumento del párrafo anterior vale para j. Esto prueba b).

d) Dada j como en la hipótesis, debemos hallar j' t.q. además $j'(\kappa) > \lambda$. Para esto, basta mirar j^n para algún $n < \omega$, pues de otra forma κ sería ω-huge, contra a). Entonces, sólo hay que verificar que j^n : V $\xrightarrow{\prec} M_n$ para algún M_n con ${}^{\lambda}M_n \subseteq M_n$ ($n > 0$). La prueba es por inducción: $M_1 = M$, $M_{n+1} = j(M_n)$. Como $M_n = \bigcup_{\alpha}(M_n \cap \mathrm{V}_{\alpha})$, $M_{n+1} = \bigcup_{\alpha} j(M_n \cap \mathrm{V}_{\alpha})$ es transitivo, y $j : M_n \to M_{n+1}$ es elemental, así que para cada $n > 0$, $j^n : V \xrightarrow{\prec} M_n$, $\mathrm{crit}\, j = \kappa$.

Si ${}^{\lambda}M_n \subseteq M_n$, ${}^{j(\lambda)}M_{n+1} \subseteq M_{n+1}$, y (como $\lambda \leq j(\lambda)$), ${}^{\lambda}M_{n+1} = {}^{\lambda}M_{n+1} \cap M \subseteq M_{n+1}$), y tenemos lo querido. $\square_{(\mathrm{T23})}$

En vista de lo anterior, las siguientes preguntas son el objetivo natural de la investigación respecto a consistencia:

Pregunta 2. ¿Para algún δ existe $j : \mathrm{V}_{\delta+1} \xrightarrow{\prec} \mathrm{V}_{\delta+1}$? De hecho, ¿$\exists j : \mathrm{V}_{\delta} \xrightarrow{\prec} \mathrm{V}_{\delta}$?

Pregunta 3. ¿$\exists j$: V $\xrightarrow{\prec} M$ con $V_{\delta} \subseteq M$ para un δ con $j(\delta) = \delta > \mathrm{crit}(j)$?

d. Cardinales Fuertes e Hipermedibles.

Pasamos ahora a explorar suposiciones intermedias entre medibilidad y supercompacidad. Algunas fueron introducidas originalmente esperando servir de base para desarrollar una teoría de core models con supercompactos. Esto aun no se ha logrado, pero los cardinales que fueron definidos resultaron ser las piezas claves en la exploración de la consistencia de ¬SCH.

El concepto de hipermedibilidad se debe a Mitchell [Mi2], los cardinales fuertes y superfuertes fueron introducidos por Gaifman, y los cardinales de Woodin por Hugh Woodin, en el 84, explorando una sugerencia de Shelah. Sus propiedades más significativas involucran el concepto de *extender*, que será tratado en el capítulo 3.

Def. 23.

(1) κ es *λ-fuerte* sii hay un $j : V \xrightarrow{\prec} M$ con $\operatorname{crit} j = \kappa$, $\lambda < j(\kappa)$ y $V_{\kappa+\lambda} \subseteq M$. κ es *fuerte* sii es λ-fuerte $\forall\lambda$.

(2) κ es *$\mathcal{P}^n(\kappa)$-(hiper)medible* sii hay una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ con $\operatorname{crit} j = \kappa$, ${}^{\kappa}M \subseteq M$ y $V_{\kappa+n} \subseteq M$.

(3) κ es *superfuerte* sii hay un $j : V \xrightarrow{\prec} M$ con $\operatorname{crit}(j) = \kappa$ y $V_{j(\kappa)} \subseteq M$.

(4) κ es (de) *Woodin* sii $\forall f \in {}^{\kappa}\kappa\, \exists\alpha < \kappa, j : V \xrightarrow{\prec} M\, \big(f``\alpha \subseteq \alpha \wedge \operatorname{crit} j = \alpha \wedge V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M\big)$.

Estos cardinales son versiones débiles de los introducidos en la sección anterior: Si κ es supercompacto entonces es $\mathcal{P}^n(\kappa)$-hipermedible ($\forall n \in \omega$) y fuerte; si κ es huge es superfuerte. Ser Woodin es intermedio entre fuerte y superfuerte. Nótese que nuestras definiciones *no* están dadas en ZFC. Como antes, hay formulaciones equivalentes y formalizables; en esta ocasión, en términos de extenders.

Incluimos un par de resultados sobre cardinales Woodin. El primero es de [MarSt1], el segundo es un ejercicio de [K].

- *Si δ es Woodin, entonces es inaccesible.*

Dem: Supongamos que δ es Woodin. Si δ no es regular, sea $\gamma = \operatorname{cf}\delta < \delta$ y $f : \gamma \to \delta$ creciente y cofinal. Sea $g \in {}^{\delta}\delta$ la función

$$g(\alpha) = \begin{cases} \gamma & \text{si } \alpha = 0 \\ f(1+\alpha) & \text{si } \alpha < \gamma \\ 0 & \text{si } \gamma \leq \alpha < \delta \end{cases} .$$

Ningún ordinal > 0 es cerrado bajo g, así que g contradice que δ sea Woodin. Luego, δ es regular.

Si δ no es límite fuerte y $\gamma < \delta \leq 2^{\gamma}$, sea $f : \delta \to \delta$ con $f(0) = \gamma$. Si j es testigo de que δ es Woodin, respecto a f, entonces $\operatorname{crit}(j)$ es medible y mayor que $f(0)$, lo cual es imposible pues $\gamma = f(0)$ muestra que $\operatorname{crit}(j)$ no es límite fuerte. Luego, δ es inaccesible. $\square_{(\bullet)}$

De hecho,

- *Si κ es Woodin, $\{\alpha < \kappa : \alpha$ es medible$\}$ es estacionario en κ, así que κ es κ-Mahlo.*

Dem: Esto es inmediato de la definición de cardinal de Woodin: Sean C club en κ, $f : \kappa \to C$ su enumeración creciente (f existe, por regularidad), α pto. crítico de un testigo j de que κ es Woodin, respecto a f. α es medible, así que basta ver que $\alpha \in C$. Pero esto es claro, pues si $\beta < \alpha$, $\alpha > f(\beta) \geq \beta$, así que $\alpha = \operatorname{Sup} f``\alpha \in C$, por ser C cerrado.

κ es κ-Mahlo puesto que si α es medible, entonces es α-Mahlo. $\square_{(\bullet)}$

5. Forcing.

Nuestras convenciones de forcing siguen [Ku5]. En particular, evitaremos trabajar con modelos de valores booleanos. Para forcing iterado, además de [Ku5], hacemos referencia a [Ba]. [J1] también es útil, aunque usualmente da sus argumentos en términos de modelos booleanos; otra referencia son los primeros 2 capítulos de [Sh3].

Dado un orden parcial (*poset*) $\mathbb{P}$, una *noción de forcing*, denotaremos su máximo elemento por $\mathbf{1}_{\mathbb{P}}$ o $\mathbf{1}$ si $\mathbb{P}$ es claro del contexto. $\leq_{\mathbb{P}}$ es la relación de orden asociada. Si p, q son *condiciones* (elementos de $\mathbb{P}$), $p \leq q$ representará que p es más *fuerte* que q, y diremos por tanto que la *extiende*. $p \parallel q$ si son *compatibles*, i.e., si $\exists r\,(r \leq p \wedge r \leq q)$. En otro caso, son incompatibles, y escribimos $p \perp q$.

Def. 24.

1. $\mathbb{P}$ es *κ-cerrado* sii $\forall\gamma < \kappa$, toda cadena $\leq$-descendente $(p_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ tiene una cota inferior: un p con $p \leq p_\alpha\ \forall\alpha$.
2. $\mathbb{P}$ es *κ-dirigido cerrado* sii $\forall X \subseteq \mathbb{P}$, X dirigido $(\forall p, q \in X\, \exists r \in X\,(r \leq p, q))$ y $|X| < \kappa$ hay una cota inferior. Obviamente, si $\mathbb{P}$ es κ-dirigido cerrado es κ-cerrado. Si $\kappa = \omega_1$ vale el recíproco.
3. $\mathbb{P}$ es *κ-cc* (κ-chain condition) sii toda *anticadena* (conjunto de elementos mutuamente incompatibles) es de tamaño $< \kappa$. ccc es ω_1-cc.

Asumimos conocidos las definiciones y resultados básicos de forcing, cf. [Ku5], [J1] y [K]. Formalmente, dada una extensión T de ZFC, si $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) son axiomas de T, hay un modelo contable transitivo M de $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ (básicamente, por reflexión, Löwenheim-Skolem y Mostowski). Si $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbf{1} \rangle \in M$ y M es modelo de los suficientes axiomas, puede definirse dentro de M una clase de *nombres* τ. El método de forcing consiste en conseguir un conjunto G *genérico* para $\mathbb{P}$ (usualmente, no en M), y construir con él un modelo $M[G]$ contable transitivo que extiende a M, dándole valores (interpretaciones) τ_G a los nombres en M.

$M[G]$ es mínimo entre los modelos que contienen a M y tienen a G entre sus elementos (y, en general, siempre es ése su significado, aunque G no sea genérico para ningún orden $\mathbb{P}$. Hay una excepción importante, al trabajar con constructibilidad; la definición se dará oportunamente). Posiblemente $M[G]$ no satisfaga todos los axiomas entre $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, pero de la combinatoria de $\mathbb{P}$ puede conseguirse que satisfaga alguna hipótesis ψ en consideración.

Para mostrar Con(ψ), basta ver que si $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ son axiomas, $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi\}$ es consistente. Así, basta hallar un $M[G]$ que los satisfaga, y para esto (módulo la combinatoria de $\mathbb{P}$) es suficiente comenzar con un M que satisfaga los φ_i y posiblemente algunos axiomas adicionales, que garanticen que los argumentos combinatorios empleados en mostrar $\psi^{M[G]}$ pueden realizarse desde M.

Informalmente, se asume un modelo M (contable, transitivo) de la teoría T bajo estudio (el *modelo base*), y se mira su extensión $M[G]$, que resulta un modelo de $T \cup \{\varphi\}$. O, más informalmente aun, se parte de V y se llega a una extensión V$[G]$ por medio de conjuntos 'imaginarios'.

Puesto que no hay problema en formalizar los argumentos presentados de esta forma, e intuitivamente es más sencillo tratar con ellos, esa será la convención que adoptaremos.

En forcing se cuenta con una relación $\Vdash$ (de *forzamiento*) que satisface, dada una fórmula φ, $p \in \mathbb{P}$ y nombres $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \iff$

$$\forall G \text{ genérico sobre } \mathbb{P}\,(p \in G \to \mathrm{V}[G] \models \varphi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}])$$

(si llegase a ser necesario indicar el modelo base, lo anotaremos como superíndice de $\Vdash$). Aunque esta equivalencia menciona a los genéricos (que no están en V), $\Vdash$ es definible desde V. Esto, que además da una definición recursiva de forzamiento por inducción en fórmulas, se asume conocido.

Hay varias maneras de formalizar la relación de forzamiento. Puede pensarse en un lenguaje (definido en la teoría) donde los nombres son (o correspondan a) constantes. Ésta es la convención que asumimos acá. Algo similar debería hacerse al tratar con las relaciones $\vdash$ y $\models$, pero para simplificar la notación nos restringimos a $\Vdash$; así, arriba debimos haber escrito

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Para cada $x \in$ V hay un nombre canónico $\check{x}$ ($\check{\mathbf{x}}$ en nuestro lenguaje). Si x es un ordinal α, escribiremos $\boldsymbol{\alpha}$ por $\check{\alpha}$. Si τ es un $\mathbb{P}$-nombre que en cualquier extensión $\mathbb{P}$-genérica de V corresponde a un término H (digamos, una función, relación, etc), por simplicidad indicaremos τ por $\dot{H}$.

Usualmente escribiremos $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ (o $\Vdash \varphi$) por $\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \varphi$.

Podemos asumir que hay un nombre $\check{\mathrm{V}}$ para identificar el modelo base. Esto hace de V un "modelo interno" de V$[G]$ si G es $\mathbb{P}$-genérico. No es claro si V, eliminando este nombre, sigue siendo un modelo interno (i.e., es *definible*). Si $\mathbb{P}$ es una clase propia, de acuerdo con un ejemplo de Sy Friedman (dado en comunicación personal) en general no es cierto, pero la situación es más confusa si $\mathbb{P}$ es un conjunto.

$\check{\mathrm{V}}$ satisface $p \Vdash \tau \in \check{\mathrm{V}}$ sii $\forall r \leq p \, \exists s \leq r \, \exists x \left(s \Vdash \check{\mathbf{x}} = \tau\right)$.

Hay una noción de isomorfismo entre 2 nociones de forcing. Ésta no es más que isomorfismo como órdenes parciales, aunque para efectos de forcing no es necesario tanto: basta que haya una sumersión completa densa de una en otra, es decir, un homomorfismo de orden con imagen densa que preserva anticadenas maximales. En este caso, es indiferente forzar con una noción o con otra.

Def. 25.

1. Si $\mathbb{P}$ es un poset y $p \in \mathbb{P}$, $\mathbb{P}\restriction_p = \{ q \in \mathbb{P} : q \leq_{\mathbb{P}} p \}$.
2. $\mathbb{P}$ es *separativo* sii $p \notin \mathbb{P}\restriction_q \longrightarrow \exists r \in \mathbb{P}\restriction_p \ (r \perp q)$.
3. $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ es el conjunto de funciones parciales de I en J con dominio (soporte) de tamaño $< \lambda$. $p \leq q$ sii $q \subseteq p$.
4. $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda) = \mathrm{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \kappa)$.
5. $\mathrm{Coll}(\kappa, \lambda) = \mathrm{Fn}(\kappa, \lambda, \kappa)$.
6. $\mathrm{Coll}(\kappa, <\mu)$ es el conjunto de funciones parciales $f : \kappa \times \mu \to \mu$ con soporte de tamaño $< \kappa$ t.q. $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Dom}\, f \, (f(\alpha, \beta) < \beta)$, con el orden usual: $p \leq q$ sii $q \subseteq p$. Éste es el orden de Lévy para colapsar μ.

Lema 13.

a) *Si G es $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda)$-genérico ($\mathrm{Coll}(\kappa, \lambda)$-genérico), $\bigcup G$ es una función con dominio $\kappa \times \lambda$ (κ) sobre 2 (λ).*

b) *Forcing con $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda)$ hace $2^\kappa \geq \lambda$. $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda)$ es κ-cerrado y $(2^{<\kappa})^+$-cc si κ es regular. Colapsa $2^{<\kappa}$ a κ y no añade subconjuntos acotados a κ.*

c) *$\mathrm{Coll}(\kappa, <\mu)$, $\kappa < \mu$, κ regular y μ inaccesible, es κ-cerrado, μ-cc y vuelve a μ el sucesor de κ.* $\square_{\text{(L13)}}$

Lema 14.

a) *Si $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \theta$ entonces preserva cardinalidades $\leq \theta$. Si θ es regular (en V) y $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$, preserva cardinalidades $\geq \theta$. Recíprocamente, si $\mathbb{P}$ preserva cardinales regulares $\geq (\leq)\theta$, preserva cofinalidades $\geq (\leq)\theta$.*

b) *Si $\mathbb{P}$ es κ-cc, forcing con $\mathbb{P}$ preserva todas las cofinalidades (y cardinalidades) $\geq \kappa$. Si $\mathbb{P}$ es κ-cerrado, preserva cofinalidades (y cardinalidades) $\leq \kappa$.*

c) *Si $\mathbb{P}$ es κ-cc, $\theta = \left(|\mathbb{P}|^{<\kappa}\right)^{\lambda}$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}} 2^{\lambda} \leq \theta$.* $\square_{(\text{L14})}$

Algunos otros resultados serán usados sin comentario. Las demostraciones dadas en [Ku5] cubren los lemas indicados, o se pueden adaptar facilmente.

Teorema 24. *Sean M, N modelos internos (de ZFC), $j : M \xrightarrow{\prec} N$ una sumersión elemental y $\mathbb{P} \in M$ una noción de forcing; si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, H es $j(\mathbb{P})$-genérico sobre N y*

$$\forall p \in \mathbb{P}\,(p \in G \longrightarrow j(p) \in H),$$

entonces j puede extenderse a

$$\begin{aligned} j^* : M[G] &\longrightarrow N[H] \\ \tau_G &\longmapsto j(\tau)_H \end{aligned},$$

y j^* todavía es elemental. Si j es definible desde M, j^* lo es desde $M[H]$.

Dem: Sea $\varphi(\vec{x})$ una fórmula. Si $M[G] \models \varphi[\vec{\tau}_G]$, sea $p \in G$ testigo: $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{M} \varphi(\vec{\tau})$. Por elementaridad, $j(p) \Vdash_{j(\mathbb{P})}^{N} \varphi(\mathrm{j}(\vec{\tau}))$ (nótese que si τ es un $\mathbb{P}$-nombre, $j(\tau)$ es un $j(\mathbb{P})$-nombre). Como $j(p) \in H$, por hipótesis, $N[H] \models \varphi[j(\vec{\tau})_G]$.

Haciendo $\varphi(x_1, x_2) \equiv x_1 = x_2$, j^* está bien definida. Remplazando φ por $\neg\varphi$, se sigue que j^* es elemental. Notando que $j(\check{x}) = j(x)\check{}$ para $x \in M$, $j^* \supseteq j$. $\square_{(\text{T24})}$

El siguiente corolario puede verse como indicando que los efectos de forzar con un *conjunto* $\mathbb{P}$ son locales.

Corolario 6. *Suponga que $\mathbb{P}$ es un poset y $|\mathbb{P}| < \kappa$. Si κ es inaccesible,*

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \kappa \texttt{ es inaccesible.}$$

Lo mismo vale si se cambia 'inaccesible' por 'medible', 'fuerte', 'supercompacto', etc.

En general, forzar con órdenes pequeños no afecta la condición de cardinales grandes mayores que el tamaño de la noción de forcing involucrada.

Dem: Primero supongamos que κ es inaccesible. Como $\mathbb{P}$ es $|\mathbb{P}|^+$-cc, $\Vdash_{\mathbb{P}} \kappa$ `es regular`. Del Lema 14, $\Vdash_{\mathbb{P}} \kappa$ `es límite fuerte`. Luego, $\mathbb{P}$ preserva inaccesibilidad.

Supongamos ahora que κ es medible. Como $|\mathbb{P}| < \kappa$, s.p.d.g. $\mathbb{P} \in \mathrm{V}_\kappa$. Sea $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ testigo de la medibilidad de κ. $j \restriction \mathrm{V}_\kappa = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_\kappa}$, así que el resultado se sigue del Teorema 24. De manera análoga se establece que $\mathbb{P}$ preserva las otras propiedades listadas; ver también el Lema 31, en el capítulo 1. $\square_{(\text{C6})}$

La siguiente definición va a resultar esencial en los capítulos 1 y 4. La notación ahí usada es la presentada acá:

Def. 26. [Ba]

a) Sea $\mathbb{P}$ un poset t.q.

$$. \ \mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{Q}} \texttt{ es un orden parcial,}$$

$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} = \{ (p, \dot{q}) : p \in \mathbb{P}, \dot{q} \in \operatorname{Dom} \dot{\mathbb{Q}}, \text{ y } p \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}} \}$ [un $\mathbb{P}$-nombre es una relación t.q. todo elemento de su dominio es un $\mathbb{P}$-nombre y todo elemento de su rango está en $\mathbb{P}$. La condición $\dot{q} \in \operatorname{Dom} \dot{\mathbb{Q}}$ garantiza que $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ sea un conjunto].

$(p_1, \dot{q}_1) \leq (p_2, \dot{q}_2)$ sii $p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_2$ y $p_1 \Vdash \dot{q}_1 \leq_{\dot{\mathbb{Q}}} \dot{q}_2$.

b) Sea $\alpha \in$ ORD. Un poset $\mathbb{P}_\alpha$ es una *iteración de α pasos* (α-stage iteration) sii $\mathbb{P}_\alpha$ es un conjunto de α-sucesiones t.q.

1) $\mathbb{P}_0 = \{0\}$.

2) Si $\alpha = \beta + 1$, $\mathbb{P}_\beta = \{ p \restriction_\beta \, : p \in \mathbb{P}_\alpha \}$ es una iteración de β pasos y hay un $\mathbb{P}_\beta$-nombre $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ t.q.

$$\mathbf{1}_\beta \Vdash \dot{\mathbb{Q}}_\beta \texttt{ es un orden parcial,}$$

y $p \in \mathbb{P}_\alpha \longleftrightarrow p \restriction_\beta \in \mathbb{P}_\beta$ y $\mathbf{1}_\beta \Vdash \check{p}(\beta) \in \dot{\mathbb{Q}}_\beta$.

Además, $p \leq q$ sii $p \restriction_\beta \leq q \restriction_\beta$ y $p \restriction_\beta \Vdash_\beta \check{p}(\beta) \mathrel{\dot{\leq}} \check{q}(\beta)$.

Así, $\mathbb{P}_\alpha \cong \mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{Q}}_\beta$.

3) Si α es límite, $\mathbb{P}_\beta = \{ p \restriction_\beta \, : p \in \mathbb{P}_\alpha \}$ es una iteración de β pasos $\forall \beta < \alpha$; $\mathbf{1}(= \mathbf{1}_\alpha) \in \mathbb{P}_\alpha$, donde $\mathbf{1}_\gamma = \dot{\mathbf{1}}_\gamma$; si $\beta < \alpha$, $p \in \mathbb{P}_\alpha$, $q \in \mathbb{P}_\beta$, $q \leq p \restriction_\beta$, entonces $q^\frown (p_\gamma)_{\beta \leq \gamma < \alpha} \in \mathbb{P}_\alpha$; y $\forall p, q \in \mathbb{P}_\alpha$, $p \leq q \longleftrightarrow \forall \beta < \alpha \, (p \restriction_\beta \leq q \restriction_\beta)$.

c) $\mathbb{P}_\alpha$ tiene soporte en I, un ideal sobre α sii $\forall p \, (\operatorname{supt} p \in I)$.

Acá, $\operatorname{supt} p$, el *soporte* de p, es $\{ \gamma : p_\gamma \neq \mathbf{1}_\gamma \}$. Así, $\mathbb{P}_\alpha$ tiene soporte *finito*, *contable* o *completo*, p. ej., sii $I = [\alpha]^{<\omega}$, $[\alpha]^{<\omega_1}$ o $\mathcal{P}(\alpha)$, respectivamente.

d) Sea α límite. $\mathbb{P}_\alpha$ es el *límite directo* de $(\mathbb{P}_\beta)_\beta$, $\mathbb{P}_\alpha = \varinjlim_{\beta < \alpha} \mathbb{P}_\beta$, sii I está contenido en el ideal de los conjuntos acotados, y de hecho $p \in \mathbb{P}_\alpha$ sii $\exists \beta < \alpha \big(p \restriction_\beta \in \mathbb{P}_\beta$ y $\forall \gamma \in [\beta, \alpha) \, (p(\gamma) = \mathbf{1}_\gamma)\big)$.

e) Sea α límite. $\mathbb{P}_\alpha$ es el *límite inverso* de los $\mathbb{P}_\beta$, $\mathbb{P}_\alpha = \varprojlim_{\beta < \alpha} \mathbb{P}_\beta$, sii $p \in \mathbb{P}_\alpha$ sii $\forall \beta < \alpha \, (p \restriction_\beta \in \mathbb{P}_\beta)$.

En d) y e), $\mathbb{P}_\alpha$ corresponde a la noción categórica del límite mencionado, cf. [J1].

Algunos autores definen la iteración de modo que, como conjunto, su $\mathbb{P}_\alpha$ corresponde con nuestro $\{ p \restriction_{\operatorname{supt} p} \, : p \in \mathbb{P}_\alpha \}$. Esto es equivalente. La idea, por supuesto, es que al hacer una iteración de α pasos estamos tomando una cadena de α modelos, cada uno de los cuales es extensión genérica (por el forcing $\mathbb{Q}_\beta$ correspondiente) del anterior, y en los pasos límites tomamos el modelo como el límite del tipo indicado de la cadena precedente.

Lema 15. *Sea $\mathbb{P}_\alpha$ una iteración de α pasos. Si $\beta < \alpha$, G_α es $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre V y, para $\beta < \alpha$, $G_\beta = \{ p \restriction_\beta \, : p \in G_\alpha \}$, G_β es $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre V.* $\square_{(\mathrm{L15})}$

Un caso particular, sencillo pero importante, de esta construcción es cuando de hecho se usa un producto real: Si $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$, $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{P} * \check{\mathbb{Q}}$. Este caso es más flexible, en el sentido de que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$, y G es $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ genérico sii $G = G_1 \times G_2$ con G_1 $\mathbb{P}$-genérico sobre V y G_2 $\mathbb{Q}$-genérico sobre $V[G_1]$; además, $V[G] = V[G_1][G_2] = V[G_2][G_1]$. Así, acá no importa el orden en que se realice la iteración. Esto en general es obviamente falso, pues algo como '$\dot{\mathbb{Q}} * \mathbb{P}$' carecería de sentido si el orden parcial $\mathbb{Q}$ representado por $\dot{\mathbb{Q}}$ (en una extensión genérica) no está en V.

Def. 27. Sean $\mathbb{P}_\alpha$ una iteración de α pasos, y $\beta < \alpha$. Si $p \in \mathbb{P}_\alpha$, sea $p^\beta = p \restriction_{[\beta,\alpha)}$, de modo que $p = p \restriction_\beta {}^\frown p^\beta$, y sea $\mathbb{P}_{\beta,\alpha} = \{p^\beta : p \in \mathbb{P}_\alpha\}$. Si G_β es $\mathbb{P}_\beta$-genérico, sea $\leq$ el orden en $\mathbb{P}_{\beta,\alpha}$ dado por $f \leq g \iff$

$$\exists p \in G_\beta \, (p \cup f \leq_{\mathbb{P}_\alpha} p \cup g).$$

Lema 16. *Con $\mathbb{P}_\alpha$, $\mathbb{P}_{\beta,\alpha}$ como arriba, si $\dot{\mathbb{P}}_{\beta,\alpha}$ es un $\mathbb{P}_\beta$ nombre para $\mathbb{P}_{\beta,\alpha}$, $\mathbb{P}_\alpha \cong \mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{P}}_{\beta,\alpha}$ y*

$\Vdash_\beta \dot{\mathbb{P}}_{\beta,\alpha}$ `es (isomorfo a) una iteración de` $(\alpha\text{-}\beta)$ `pasos.` $\square_{(\text{L16})}$

6. L.

La teoría de core models, modelos internos minimales, necesariamente ha de comenzar con el menor de todos: L.

Def. 28. [Gödel] $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$, donde $L_0 = \emptyset$, $L_{\alpha+1} = \mathrm{def}(L_\alpha)$, $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ si λ es límite. L es la clase de los conjuntos *construibles.*

Es fácil ver que L es un modelo interno y que, como se mencionó en la Introducción, si $\mathrm{Inn}(M)$ entonces $M \supseteq L$, $L \models V = L$ y, de hecho, $L^M = L$, de modo que no puede mostrarse que halla conjuntos no construibles. $L \models AC + GCH$, así que es una estructura muy agradable. Pero también muy delgada, pues por supuesto $L \models \neg\exists\kappa\,(\kappa$ medible), ya que la sumersión asociada con cualquier medida $\mathcal{U}$ tiene rango $M \neq V$, pues $\mathcal{U} \notin M$, y esto contradice que L sea el único modelo interno.

La sucesión $(L_\alpha)_\alpha$ tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- *$\alpha \leq \beta$ implica $L_\alpha \subseteq L_\beta$. Si $\alpha < \beta$, $L_\alpha \in L_\beta$. Los L_α son transitivos, $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, $L \cap \alpha = L_\alpha \cap ORD = \alpha$. Si $\alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |\alpha|$.* $\square_{(\bullet)}$

Gödel modificó su definición original de L (la dada), de modo que no fuera necesario apelar a una gödelización del lenguaje, y mostró que para generar los L_α bastaba iterar 8 'operaciones fundamentales'. Al tratar de hacer una teoría de los L_α se tropieza con algunos problemas rápidamente, sobre todo porque, como $\mathrm{rank}\, L_\alpha = \alpha$, L_α no es cerrado bajo pares ordenados si α es sucesor. Esto llevó a Jensen, a fines de los 60, a estudiar a L basándose en otra jerarquía, que sí permitiera argumentos que involucrasen pares ordenados sin necesidad de cambiar de rango. Su trabajo apareció en [Je1], y presentamos a continuación algunas ideas (muy) básicas, siguiendo también [Fri2]. Para un estudio cuidadoso de constructibilidad, puede verse [D].

Def. 29.

(1) Sea S transitivo. S satisface Σ_0-*comprensión* sii $\{y \in x : \varphi(y)\} \in S$ para todo $x \in S$, donde φ es cualquier fórmula Σ_0 (con parámetros de S).

(2) Una relación binaria $W_n(e,x)$ sobre S, transitivo, es un *predicado Σ_n-universal* sii es Σ_n-definible sobre $\langle S, \in \rangle$ sin parámetros, y $\forall Y \subseteq S$ Σ_n-definible sobre $\langle S, \in \rangle$ con parámetros, $\exists e \in S$ t.q. $Y = \{ x \in S : W_n(e,x) \}$.

Lema 17. *Sea S un conjunto transitivo y cerrado bajo pares, que satisface Σ_0-comprensión y 'todo conjunto tiene clausura transitiva'. Entonces existe un predicado Σ_n-universal para S.* $\square_{(\mathrm{L17})}$

[Fri2] muestra la definición explícita de un tal predicado, que podríamos llamar canónico.

Def. 30. La jerarquía $(J_\alpha)_\alpha$ se define por inducción: $J_0 = \emptyset$, $J_1 = \mathrm{L}_\omega$. Si α es límite, $J_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} J_\beta$. Por inducción, supongamos que J_α satisface las condiciones del lema. Sea $W_n^\alpha(e,x)$ el predicado canónico Σ_n-universal para J_α. Para $e \in J_\alpha$ sean

$$X(0,e) = e, \qquad X(n+1,e) = \{ X(n,f) : W_{n+1}^\alpha(e,f) \}.$$

Entonces $J_{\alpha,n} = \{ X(n,e) : e \in J_\alpha \}$ y $J_{\alpha+1} = \bigcup_{n \in \omega} J_{\alpha,n}$.

Ésta no es la definición original de Jensen. Él, siguiendo la segunda aproximación de Gödel, define $J_{\alpha+1}$ como la clausura de J_α bajo funciones *rudimentarias* (ver abajo). Una desventaja de nuestra aproximación es que es necesario verificar que la definición es correcta, lo cual es parte del siguiente lema; una ventaja, es que nos aproxima rápidamente a los primeros resultados interesantes de estructura fina.

Lema 18.

a) *$n \le m$ implica $J_{\alpha,n} \subseteq J_{\alpha,m}$.*
b) *$J_{\alpha,n}$ es transitivo.*
c) *$ORD \cap J_{\alpha,n} = \omega\alpha + n$.*
d) *$J_{\alpha+1} \models$ Pares $+ \Sigma_0$-comprensión.*
e) *$J_{\alpha+1} \cap \mathcal{P}(J_\alpha) = \mathrm{def}(J_\alpha)$.*

d) garantiza que la definición inductiva puede realizarse. Damos una idea de la demostración para ilustrar los métodos. Ver [Fri2] para detalles.

Dem: a) Por inducción en n, se define una función $F(n,\cdot) : J_\alpha \to J_\alpha$ de modo que $X(n,e) = X(n+1, F(n,e))$. Esta función se puede tomar Σ_1 definible sobre J_α.

b) Se sigue de a).

c) Como $x \in J_{\alpha,n+1}$ implica $x \subseteq J_{\alpha,n}$, por inducción $\mathrm{ORD} \cap J_{\alpha,n} \le \omega\alpha + n$. Además, se define una sucesión $(e_n)_n$, con ayuda de la función F de arriba, de modo que

$$X(n+1, e_{n+1}) = \omega\alpha + n.$$

d) y e) Si $X \subseteq J_{\alpha,n}$ es definible sobre $\langle J_{\alpha,n}, \in \rangle$, entonces $X \in J_{\alpha,m}$ para algún m (por tanto, $\mathrm{def}(J_\alpha) \subseteq J_{\alpha+1}$). $\square_{(\mathrm{L18})}$

La definición presentada es equivalente a la de Jensen, pero esta última es más combinatoria. La incluimos a continuación:

Def. 31. Una función $f : \mathrm{V}^n \to \mathrm{V}$, donde n recorre ω, es *rudimentaria* (rud) sii es finítamente generada por medio de los siguientes esquemas (que, como comenta Jensen, son los esquemas usuales para las funciones primitivas recursivas, sin el esquema de recursión):

a) $f(\vec{x}) = x_i$ $(i < n)$.
b) $f(\vec{x}) = x_i \setminus x_j$ $(i, j < n)$.
c) $f(\vec{x}) = \{x_i, x_j\}$ $(i, j < n)$.
d) $f(\vec{x}) = h(g(\vec{x}))$ (h, g rud).
e) $f(y, \vec{x}) = \bigcup_{z \in y} g(z, \vec{x})$ (g rud).

Lema 19. *[Jensen]* $J_0 = \emptyset$, $J_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} J_\beta$ *si* α *es límite,* $J_{\alpha+1}$ *es la clausura de* $J_\alpha \cup \{J_\alpha\}$ *bajo funciones rud,* $\mathrm{rud}(J_\alpha)$. $\square_{(\mathrm{L19})}$

Lema 20.

a) *Hay un buen orden* $<_\alpha$ *(definible en* J_α *por una fórmula* Σ_1*) de* J_α. *Su restricción a* J_λ *es absoluta.*
b) *[Condensación] Si* $\langle X, \in\rangle \prec_1 \langle J_\alpha, \in\rangle$ *entonces* $\exists\beta\,(\langle X, \in\rangle \cong \langle J_\beta, \in\rangle)$.
c) $(J_\nu)_{\nu<\alpha}$ *es* Σ_1*-definible sobre* J_α*; la definición es uniforme.*

Dem: a) $<_0 = \emptyset$, $<_1$ es cualquier buen orden Σ_1-definible de L_ω. Si α es límite, $x <_\alpha y$ sii $x <_\beta y$ para algún $\beta < \alpha$. $x <_{\alpha+1} y$ sii $x <_\alpha y$ o $\exists n\,(y \in J_{\alpha,n+1} \setminus J_{\alpha,n}$ y $(x \in J_{\alpha,n}$ o $x' <_\alpha y'))$, donde x' es el $<_\alpha$-menor e t.q. $X(n+1, e) = x$, e igual con y'.

Corolario 7. $L \models AC$*. De hecho, hay un buen orden definible de* L. $\square_{(\mathrm{C7})}$

b) Se muestra que $X \cong X' = J_\beta$, donde $\omega\beta = \mathrm{ORD} \cap X'$ y X' es el colapso de Mostowski de X. $\square_{(\mathrm{L20})}$

a) y b) del Lema 20 valen también para $(\mathrm{L}_\alpha)_\alpha$, en a) con λ límite. Además, si $\langle X, \in\rangle \equiv \langle \mathrm{L}_\lambda, \in\rangle$, λ límite y X transitivo, entonces $X = \mathrm{L}_\alpha$ para algún α.

La importancia de condensación se debe a que hay un método 'estándar' de generar subestructuras Σ_1-elementales (Nótese que como J_β no es necesariamente modelo de ZFC, ser subestructura Σ_1-elemental no siempre implica ser subestructura elemental), y si $X \subseteq J_\alpha$, se define su clausura Σ_1 como la menor subestructura Σ_1-elemental de J_α que contiene a X (se puede mostrar que siempre existe), generada por funciones de Skolem Σ_1-definibles con parámetros de J_α (usando el buen orden $<_\alpha$). La teoría de estructura fina se desarrolla mostrando que valen las generalizaciones de estos resultados para niveles mayores de definibilidad.

De aquí resulta, por ejemplo,

- $\mathrm{L}_{\omega+\alpha} = \mathrm{V}_{\omega+\alpha} \cap J_{1+\alpha}$, de modo que $\mathrm{L}_\beta = J_\beta$ para $\beta = \omega\beta$.
- $\Sigma_n(\mathrm{L}_{\omega+\alpha}) = \mathcal{P}(\mathrm{L}_{\omega+\alpha}) \cap \Sigma_n(J_{1+\alpha})$ $(n \geq 1)$, donde para $\mathcal{A} = \langle A, \in, (B_i)_{i<m}\rangle$, con las B_i relaciones, $\Sigma_n(\mathcal{A})$ es la colección de relaciones Σ_n-definibles sobre $\mathcal{A}$.

Jensen define a continuación el Σ_n-*projectum* de α, ρ^n_α, como el mayor $\rho \leq \alpha$ t.q. $\langle J_\rho, B\rangle$ es sensible para todo $B \in \Sigma_n(J_\alpha)$. $\mathcal{A}$ es *sensible* (amenable) sii —en la notación de arriba— A es transitivo y $B_i \cap x \in A\, \forall x \in A, i \in m$. Así, por ejemplo, $\rho^n_\alpha = \alpha$ si $J_\alpha \models \mathrm{ZF}^-$, y ρ^n_α es el menor ρ t.q. $\Sigma_n(J_\alpha) \cap \mathcal{P}(\omega\rho) \not\subseteq J_\alpha$, y también es el menor ρ para el que hay una función $\Sigma_n(J_\alpha)$ de J_ρ sobre J_α.

Con ayuda de los Σ_n-projecta Jensen define *códigos estándar* (un código Σ_n para J_α es $A \subseteq J_{\rho_\alpha^n}$ $(\alpha, n > 0)$ t.q. $A \in \Sigma_n(J_\alpha)$ y $\forall m \geq 1$

$$\Sigma_{n+m}(J_\alpha) \cap \mathcal{P}(J_{\rho_\alpha^n}) = \Sigma(\langle J_{\rho_\alpha^n}, A \rangle).$$

Su utilidad se observa cuando aparecen sumersiones en escena: Si $\pi : \langle J_\alpha, A \rangle \xrightarrow{\prec}_0 \langle J_\beta, B \rangle$ y $\pi``\omega\alpha$ es cofinal en $\omega\beta$, entonces $\pi : \langle J_\alpha, A \rangle \xrightarrow{\prec}_1 \langle J_\beta, B \rangle$ y los códigos especiales (estándar) que Jensen ha definido se transfieren unos en otros. Esto permite construir en L estructuras muy uniformes que pueden verse como portadoras de información, y usualmente están provistas de gran contenido combinatorio. Por ejemplo, principios como $\diamondsuit_\kappa$, $\Box_\kappa$ o morasses.

No es nuestra intención hacer un estudio (detallado) de la teoría de estructura fina, pero es imposible evitarla puesto que es fundamental para la teoría de core models, y ésta (como hemos insistido repetidas veces) es parte esencial de la historia del problema de los cardinales singulares.

Capítulo 1

Primeros Resultados: Desigualdades y Cotas Para ¬SCH

De ahora en adelante voy a reflexionar de otra manera, voy a expresarme en otra lengua, voy a reaccionar de modo inédito.

(Elie Weisel, *El Crepúsculo, a lo Lejos*, (1987).)

1. Las Desigualdades de Silver y Galvin-Hajnal.

Estableceremos el teorema general de Silver como corolario del de Galvin y Hajnal. Por ahora, consideremos el siguiente caso particular, representativo de lo que sigue:

Teorema 25. *[Silver] $\aleph_{\omega_1}$ no es el primer contraejemplo a GCH.*

Dem: Supongamos a partir de ahora que $\forall\kappa < \aleph_{\omega_1}\,(2^\kappa = \kappa^+)$. Para $\alpha < \omega_1$, escojamos una inyección $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(\aleph_\alpha) \to \aleph_{\alpha+1}$. Para $X \subseteq \aleph_{\omega_1}$ y $\alpha < \omega_1$, sea $f_X(\alpha) = \varphi_\alpha(X \cap \aleph_\alpha)$. Si $\mathcal{F} = \{\, f_X : X \subseteq \aleph_{\omega_1} \,\}$, nótese que

(1) $\forall f, g \in \mathcal{F}$ si $f \neq g$ entonces f y g son eventualmente diferentes, es decir, $f(\beta) \neq g(\beta)$ para todo β suficientemente grande. En efecto, si $f = f_X$ y $g = f_Y$, $X \neq Y$, hay un primer $\alpha < \omega_1$ tal que $X \cap \aleph_\alpha \neq Y \cap \aleph_\alpha$. Si $\beta \geq \alpha$, claramente $f(\beta) = f_X(\beta) \neq f_Y(\beta) = g(\beta)$, pues las φ_β son 1-1.

(2) $\forall f \in \mathcal{F}\, \forall \alpha < \omega_1\, (f(\alpha) < \aleph_{\alpha+1})$.

(3) $|\mathcal{F}| = 2^{\aleph_{\omega_1}}$, por (1).

La idea de la demostración es acotar $|\mathcal{F}|$.

En general, diremos que $\mathcal{G}$, una colección de funciones de ω_1 en $\aleph_{\omega_1}$, es *casi disyunta* sii satisface (1).

Lema 21. *Suponga que $\mathcal{G}$ es casi disyunta y que*

(4) $\forall f \in \mathcal{G}\, \{\, \alpha : f(\alpha) < \omega_\alpha \,\}$ *es estacionario.*

Entonces $|\mathcal{G}| \leq \aleph_{\omega_1}$.

Dem: Para $f \in \mathcal{G}$, sea $\hat{f} : \omega_1 \to \omega_1$ el 'índice' de $|f(\cdot)|$, es decir, $|f(\alpha)| = \aleph_{\hat{f}(\alpha)}$. Entonces $\{\, \alpha : \hat{f}(\alpha) < \alpha \,\}$ es estacionario, por (4), así que por el lema de Fodor existe $\gamma_f \in \omega_1$ t.q. $S_f = \{\, \alpha : \hat{f}(\alpha) = \gamma_f \,\}$ es estacionario. Como γ_f varía sobre ω_1, S_f sólo puede ser uno de $\aleph_2$ conjuntos, y si $\mathcal{A}_{\beta,S} = \{\, f \in \mathcal{G} : \gamma_f = \beta \text{ y } S_f = S \,\}$, entonces $|\mathcal{A}_{\beta,S}| \leq \aleph_{\beta+2}$ (ver abajo) para S y β fijos, $|\mathcal{G}| = \left|\bigcup_{\beta,S} \mathcal{A}_{\beta,S}\right| \leq \sum_{\beta,S} |\mathcal{A}_{\beta,S}| \leq \aleph_2 \cdot \operatorname{Sup}_{\beta<\omega_1} \aleph_{\beta+2} = \aleph_2 \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$, como demostrábamos.

Para probar la afirmación sobre $|\mathcal{A}_{\beta,S}|$, nótese que o bien este conjunto es vacío, o las $f \restriction_S$ son distintas, pues S será estacionario y por tanto cofinal, y $\mathcal{G}$ es casi disyunta. Pero $\operatorname{Ran}(f \restriction_S) \subseteq \aleph_{\beta+1}$, por definición de γ_f. El estimativo se tiene entonces, recordando que GCH vale antes de $\aleph_{\omega_1}$. $\square_{(\text{L21})}$

Corolario 8. *Sea $g \in {}^{\omega_1}\aleph_{\omega_1}$ tal que $\forall\alpha\,(g(\alpha) < \aleph_{\alpha+1})$. Suponga que $\mathcal{G}$ es casi disyunta y que*

(5) $\forall f \in \mathcal{G}\,\{\,\alpha : f(\alpha) < g(\alpha)\,\}$ *es estacionario.*

Entonces $|\mathcal{G}| \leq \aleph_{\omega_1}$.

Dem: Sea $\tau_\alpha : g(\alpha) \to \aleph_\alpha$ 1-1, para $\alpha < \omega_1$. Sea $\bar{f} : \alpha \mapsto \begin{cases} \tau_\alpha(f(\alpha)) & \text{si } f(\alpha) < g(\alpha) \\ f(\alpha) & \text{si no} \end{cases}$.
Consideremos $\bar{\mathcal{G}} = \{\,\bar{f} : f \in \mathcal{G}\,\}$. Entonces $\bar{\mathcal{G}}$ es casi disyunta, pues $\mathcal{G}$ lo es, y las τ_α son 1-1; en particular, $\mu : f \mapsto \bar{f}$ es 1-1. Por (5), es fácil ver que $\bar{\mathcal{G}}$ cumple (4), así que el lema es aplicable, y $|\bar{\mathcal{G}}| \leq \aleph_{\omega_1}$. Pero como μ es 1-1, $|\mathcal{G}| \leq |\bar{\mathcal{G}}|$. $\square_{(C8)}$

Para completar la demostración del teorema, partiremos $\mathcal{F}$ en $\aleph_{\omega_1+1}$ conjuntos de tamaño a lo más $\aleph_{\omega_1}$. Esto obviamente basta.

Si $f \neq g \in \mathcal{F}$, diremos $f \lessdot g$ si y sólo si $\{\,\alpha : f(\alpha) < g(\alpha)\,\} \in \mathcal{C}_{\omega_1}$, el filtro club sobre ω_1. Por el corolario, si $g \in \mathcal{F}$ entonces $g \lessdot f$ para toda $f \in \mathcal{F}$, excepto quizás por a lo más $\aleph_{\omega_1}$ funciones f.

Podemos definir entonces, inductivamente, una $\aleph_{\omega_1+1}$-sucesión $\lessdot$-creciente de elementos de $\mathcal{F}$, $(f_\alpha)_\alpha$. Nótese que si $f \in \mathcal{F}$, $f \lessdot f_\alpha$ para algún α, o habría $\aleph_{\omega_1+1}$ funciones que f no $\lessdot$-precede, lo que contradice la última afirmación del párrafo anterior. Así, $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in \aleph_{\omega_1+1}} \mathcal{F}_\alpha$, donde $\mathcal{F}_\alpha = \{\,f \in \mathcal{F} : f \lessdot f_\alpha\,\}$ que, por el corolario, es de tamaño a lo más $\aleph_{\omega_1}$. $\square_{(T25)}$

De la prueba se observa que el teorema puede exhibirse en mayor generalidad. Pero también se observa que el hecho de trabajar con un cardinal de cofinalidad *mayor* que ω fue fundamental.

Los siguientes 2 teoremas son los resultados principales de [GH].

Teorema 26. *Sean κ, λ regulares y no contables, y supongamos que $\forall\delta < \lambda\,(\delta^\kappa < \lambda)$. Si $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ es tal que*

$$\forall\alpha < \kappa \left(\prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \aleph_\lambda\right)$$

entonces $\prod_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha < \aleph_\lambda$.

Nótese que, dado κ regular y no contable, $\lambda = (\rho^\kappa)^+$, $\rho \geq 2$, es de la forma pedida.

Dem: Comencemos con la definición de un concepto que será fundamental:

Def. 32. Un *sistema transversal casi-disyunto* (a.d.t., almost disjoint transversal system) para una sucesión $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ es $F \subseteq \prod_\alpha A_\alpha$ t.q.

$$|\{\,\alpha \in \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\,\}| < \kappa$$

para todas las f y g distintas de F.

Lema 22. *Sean $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una sucesión de cardinales, $A_\alpha = \dot{\prod}_{\beta<\alpha}\kappa_\beta$ para $\alpha < \kappa$, y $A = (A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$. Existe un F a.d.t. para A con $|F| = \prod_{\alpha<\kappa}\kappa_\alpha$.*

Dem: Para $g \in \dot{\prod}_{\alpha<\kappa}\kappa_\alpha$ defina $f_g : \kappa \to A$ por $f_g(\alpha) = g \restriction_\alpha$.

Entonces $F = \{ f_g : g \in \dot{\prod}_{\beta<\kappa}\kappa_\beta \}$ es como se busca. $\square_{(\mathrm{L22})}$

Lema 23. *(Con κ, λ como en la hipótesis del teorema.) Sea $A = (A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una sucesión de conjuntos t.q. $\forall\alpha < \kappa\ (|A_\alpha| < \aleph_\lambda)$. Entonces todo F a.d.t. para A es pequeño: $|F| < \aleph_\lambda$.*

Dem: Para una sucesión $B = (B_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sea

$$T(B) = \mathrm{Sup}\{\, |F| : F \text{ es a.d.t. para } B \,\}.$$

Claramente, $T(B)$ sólo depende de $\left(|B_\alpha|\right)_\alpha$, y T es monótona: $T(B) \leq T(C)$ si $|B_\alpha| \leq |C_\alpha|\,\forall\alpha < \kappa$. En particular, consideraremos $T(\varphi)$ para $\varphi \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$, y si φ es constante, digamos $\varphi \equiv \delta$, $\varphi(\alpha) = \delta\,\forall\alpha < \kappa$, escribiremos $T(\kappa,\delta)$ por $T(\varphi)$ —aunque no tendremos ocasión de usar esta notación hasta el próximo teorema—. Nótese que, obviamente, $T(\kappa,\delta) \leq \delta^\kappa$.

Definimos el orden parcial $<^*$ en ${}^\kappa\mathrm{ORD}$ por $\varphi <^* \psi \longleftrightarrow |\{\, \alpha < \kappa : \varphi(\alpha) \geq \psi(\alpha) \,\}| < \kappa$.

Afirmación. *$<^*$ es bien fundamentado.*

Dem: Exactamente como la del Teorema 14, notando que la κ-completitud del filtro $\mathcal{U}$ de los conjuntos cuyo complemento es acotado se sigue de la regularidad de κ. $\square_{(\mathrm{Af})}$

Dada φ, sea $\aleph \circ \varphi$ la función $\alpha \mapsto \aleph_{\varphi(\alpha)}$. Basta mostrar que si $\varphi \in {}^\kappa\lambda$, entonces $T(\aleph\circ\varphi) < \aleph_\lambda$. Por $<^*$-inducción, podemos suponer que φ es un contraejemplo $<^*$-minimal, y derivar una contradicción.

Sea $I = \{\, X \subseteq \kappa : \exists\psi \in {}^\kappa\lambda \left[\forall\alpha \in X \left(\psi(\alpha) < \varphi(\alpha) \text{ o } \psi(\alpha) = 0\right) \text{ y } T(\aleph\circ\psi) \geq \aleph_\lambda \,\right\}$. Dado $X \in I$, nos referiremos a toda ψ como en la condición como un *testigo* de que $X \in I$.

Afirmación. *I es un ideal κ-completo.*

Dem: Es fácil ver que I es un ideal que contiene todos los singletons (de hecho, todos los conjuntos acotados de κ).

Sea $0 < \delta < \kappa$, y supongamos que $(Y_\mu)_{\mu\in\delta}$ es una sucesión de elementos de I. Sea $(\psi_\mu)_{\mu\in\delta}$ una sucesión de testigos, de modo que $\forall\tau < \aleph_\lambda$ para cada $\mu < \delta$ hay un $F_\mu = \{\, f_{\mu,\beta} : \beta \in \tau \,\}$ a.d.t. para $\aleph\circ\psi_\mu$.

Definamos $\psi \in {}^\kappa\lambda$ por $\psi(\alpha) = \mathrm{mín}_\mu\,\psi_\mu(\alpha)$, y escojamos una 'partición' $\kappa = \bigcup_{\mu\in\delta} X_\mu$ de modo que si $\alpha \in X_\mu$ entonces $\psi(\alpha) = \psi_\mu(\alpha)$ (algunos X_μ podrían ser vacíos).

Sean $f_\beta = \bigcup_{\mu<\delta}(f_{\mu,\beta} \restriction_{X_\mu})$ $(\beta < \tau)$ y $F = \{f_\beta\}_\beta$. Entonces F es a.d.t. para $\aleph\circ\psi$. Por tanto, $T(\aleph\circ\psi) \geq \mathrm{mín}_\mu\,T(\aleph\circ\psi_\mu) \geq \aleph_\lambda$, y ψ es testigo de que $\bigcup_\mu Y_\mu \in I$. $\square_{(\mathrm{Af})}$

Partamos κ como $X_0 \cup X_1 \cup X_2$ de modo que $\alpha \in X_0$ sii $\varphi(\alpha) = 0$, $\alpha \in X_1$ sii $\varphi(\alpha)$ es un ordinal límite (> 0), y $\alpha \in X_2$ sii $\varphi(\alpha)$ es un ordinal sucesor.

Entonces $X_0 \in I$: $|X_0| < \kappa$, o de lo contrario $T(\aleph\circ\varphi) \leq \aleph_0^\kappa < \lambda \leq \aleph_\lambda$. Por tanto I es propio: Si ψ es testigo de que $\kappa \in I$, $\{\, \alpha < \kappa : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha) \,\} = \{\, \alpha : \varphi(\alpha) = 0 \,\} = X_0$, y $\psi <^* \varphi$. Como ψ es testigo, $T(\aleph\circ\psi) \geq \aleph_\lambda$, y esto contradice la $<^*$-minimalidad de φ.

También $X_1 \in I$: Por regularidad de λ, $\exists\beta < \lambda \forall\alpha < \kappa\,(\varphi(\alpha) \leq \beta)$. Así, si $X = \{\,\psi \in {}^{\kappa}\lambda : \forall\alpha \in X_1\,(\psi(\alpha) < \varphi(\alpha)) \wedge \forall\alpha \in \kappa \setminus X_1\,(\psi(\alpha) = \varphi(\alpha))\,\}$, $|X| \leq |\beta|^{\kappa} < \lambda$. Para cada γ con $|X| \leq \mu < \lambda$, sea F_μ un a.d.t. para $\aleph \circ \varphi$ con $|F_\mu| > \aleph_\mu$. Si $\psi \in X$, sea $F_\mu^{\psi} = F_\mu \cap \dot{\prod}_{\alpha<\kappa} \aleph_{\psi(\alpha)}$. Entonces F_μ^{ψ} es a.d.t. para $\aleph \circ \psi$, y $F_\mu = \bigcup_\psi F_\mu^{\psi}$, esto último porque $\varphi(\alpha)$ es límite si $\alpha \in X_1$.

Luego, existe $\psi_\mu \in X$ t.q. $|F_\mu^{\psi_\mu}| > \aleph_\mu$. De nuevo por regularidad de λ, $|\{\,\mu \in \lambda : \psi_\mu = \psi\,\}| = \lambda$ para alguna $\psi \in X$. Entonces $T(\aleph \circ \psi) \geq \aleph_\lambda$, y ψ es testigo de que $X_1 \in I$.

Se sigue que $X_2 \notin I$. Si $X \subseteq X_2$, sea $\psi_X \in {}^{\kappa}\lambda$ dada por

$$\psi_X(\alpha) = \begin{cases} \varphi(\alpha) - 1 & \text{si } \alpha \in X \\ \varphi(\alpha) & \text{si no} \end{cases}.$$

Para cada $X \subseteq X_2$ con $X \notin I$, sea $\rho(X) < \lambda$ t.q. $T(\aleph \circ \psi_X) = \aleph_{\rho(X)}$. Sea $\rho < \lambda$ t.q. $2^{\kappa} < \rho$ y $\rho(X) < \rho \forall X \subseteq X_2$ con $X \notin I$. Tal ρ existe por regularidad, mediante un argumento similar al del párrafo anterior.

Sea F a.d.t. para $\aleph \circ \varphi$, $|F| > \aleph_{\rho+1}$. Para cada $X \subseteq X_2$, $X \notin I$, sea H_X la función de dominio F t.q. $\forall f \in F\,(H_X(f) = \{\,g \in F : \forall\alpha \in X\,(g(\alpha) < f(\alpha))\,\})$. Entonces, si $f \in F$, $H_X(f)$ es a.d.t. para $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, donde $A_\alpha = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } \alpha \in X \\ \aleph_{\varphi(\alpha)} & \text{si no} \end{cases}$. Como $|A_\alpha| \leq \aleph_{\psi_X(\alpha)}$, y T sólo depende de las cardinalidades de sus argumentos, hay un G a.d.t. para $\aleph \circ \psi_X$ con $|G| = |H_X(f)|$.

Por tanto $|H_X(f)| = |G| \leq T(\aleph \circ \psi_X) = \aleph_{\rho(X)} < \aleph_\rho$. Sea $H(f) = \bigcup\{\,H_X(f) : X \subseteq X_2, X \notin I\,\}$. Entonces $|H(f)| \leq 2^{\kappa}\aleph_\rho = \aleph_\rho$. Se sigue que $|H(f)| \leq \aleph_\rho < \aleph_{\rho+1} < |F|$ si $f \in F$. Sea $G \subseteq F$, $|G| = \aleph_{\rho+1}$, y tomemos $h \in (F \setminus G) \setminus \bigcup_{g\in G} H(g)$, $i \in G \setminus H(h)$. Tenemos que $h, i \in F$, $h \neq i$, $h \notin H(i)$, $i \notin H(h)$, con lo que llegamos a una contradicción, pues entonces

$$\kappa = X_0 \cup X_1 \cup \{\,\alpha : h(\alpha) = i(\alpha)\,\} \cup \{\,\alpha \in X_2 : h(\alpha) < i(\alpha)\,\} \cup \{\,\alpha \in X_2 : i(\alpha) < h(\alpha)\,\}$$

pertenecería a I. $\square_{(\mathrm{L23})}$

El teorema se sigue de inmediato: Sean κ, λ, $(\kappa_\alpha)_\alpha$ como en el enunciado, y definamos $A = (A_\alpha)_\alpha$ por $A_\alpha = \dot{\prod}_{\beta<\alpha} \kappa_\beta$.

Por el Lema 22, hay un F a.d.t. para A con $|F| = \prod_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha$. Pero $|A_\alpha| = \prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \aleph_\lambda$. Por el Lema 23, $|F| < \aleph_\lambda$. $\square_{(\mathrm{T26})}$

Corolario 9.

a) *Sean κ, λ como en el teorema. Si $\tau^{\sigma} < \aleph_\lambda \forall\sigma < \kappa$, entonces $\tau^{\kappa} < \aleph_\lambda$. Em particular, si κ es regular no contable, $\rho \geq 2$, entonces $\tau^{\sigma} < \aleph_{(\rho^{\kappa})^+}$ implica $\tau^{\kappa} < \aleph_{(\rho^{\kappa})^+}$.*

Por ejemplo, si ξ es un ordinal con $\operatorname{cf}\xi > \omega$ y $\aleph_\alpha^{\sigma} < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^+} \forall\sigma < \operatorname{cf}\xi, \alpha < \xi$, entonces

$$\aleph_\xi^{\operatorname{cf}\xi} < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^+}.$$

b) *Sean κ, λ como en el teorema, y sea τ con* $\mathrm{cf}\,\tau = \kappa$. *Si* $2^\sigma < \aleph_\lambda\, \forall \sigma < \tau$, *entonces* $2^\tau < \aleph_\lambda$ *(se prueba con la misma idea que el Lema 1). En particular, si κ es regular no contable,* $\mathrm{cf}\,\tau = \kappa$, $\rho \geq 2$ *y* $2^\sigma < \aleph_{(\rho^\kappa)^+}\, \forall \sigma < \tau$, *entonces* $2^\tau < \aleph_{(\rho^\kappa)^+}$.

Luego, si $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\left(|\xi|^{\mathrm{cf}\,\xi}\right)^+}\, \forall \alpha < \xi$, *donde* $\mathrm{cf}\,\xi > \omega$, *entonces*

$$2^{\aleph_\xi} < \aleph_{\left(|\xi|^{\mathrm{cf}\,\xi}\right)^+}. \quad \square_{(C9)}$$

Nótese el caso en que $\aleph_\xi$ sea límite fuerte.

Observación. El primer cardinal (singular de cofinalidad $> \omega$) para el que el teorema no implica cotas en la exponencial (cuando es límite fuerte) sería el primer punto fijo ($\kappa = \aleph_\kappa$) de cofinalidad ω_1; con los puntos fijos el establecimiento de cotas ha resultado mucho más difícil que en general. En ocasiones no es posible, o debe asumirse alguna hipótesis adicional, ver capítulo 5.

Pasemos ahora al segundo de los teoremas de [GH]:

En el anterior, $\varphi <^* \psi$ sii $|\{\,\alpha : \varphi(\alpha) \geq \psi(\alpha)\,\}| < \kappa$. Es decir, sii $\{\,\alpha : \varphi(\alpha) \geq \psi(\alpha)\,\}$ pertenece al ideal de los subconjuntos acotados de κ. En general, casi cualquier otro ideal 'razonable' podría usarse, lo que lleva a resultados similares pero más detallados. Así, definimos ahora para $\varphi, \psi \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$,

$$\varphi <^* \psi \iff \{\,\alpha : \varphi(\alpha) \geq \psi(\alpha)\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa\,.$$

Usando el Lema 4 puede mostrarse que $<^*$ es bien fundamentado.

Def. 33. Por recursión se define el *rango* de φ para $\varphi \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$:

$$\|\varphi\| = \mathrm{Sup}\{\, \|\psi\| + 1 : \psi <^* \varphi\,\}.$$

Lema 24. *Sea $\varphi \in {}^\kappa ORD$.*

a) *Si* $\mu < \kappa^+\ \exists \varphi_\mu \in {}^\kappa\kappa\,(\|\varphi_\mu\| = \mu \wedge [\|\varphi\| > \mu \text{ sii } \varphi^* > \varphi_\mu])$. *Tal* φ_μ *es único módulo* NS_κ, *es decir, si* φ'_μ *y* φ_μ *son como se pide,* $\{\,\alpha < \kappa : \varphi_\mu(\alpha) \neq \varphi'_\mu(\alpha)\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa$.

b) $\mu < \kappa \longrightarrow (\|\varphi\| > \mu \leftrightarrow \{\,\alpha : \varphi(\alpha) \leq \mu\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa$. *Es decir, si* $\mu < \kappa$, *puede tomarse* $\varphi_\mu \equiv \mu$.

c) $\|\varphi\| > \kappa \longleftrightarrow \{\,\alpha : \varphi(\alpha) \leq \alpha\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa$. *Es decir, puede tomarse* $\varphi_\kappa = id_\kappa$.

d) $\|\varphi\| < \left(\prod_{\varphi(\alpha) \neq 0} |\varphi(\alpha)|\right)^+$.

e) *[Shelah] Sea λ regular no contable t.q.* $\forall \tau < \lambda\,(\mathrm{cf}\,\tau = \kappa \longrightarrow \tau^\kappa < \lambda)$. *Si* $\varphi \in {}^\kappa\lambda$, *entonces* $\|\varphi\| < \lambda$.

En [GH] se exigía en e) que la desigualdad valiera $\forall \tau < \lambda$.

Dem: a) Definamos φ_μ por inducción: $\varphi_0 \equiv 0$. Si $0 < \mu < \kappa^+$ y φ_ν ha sido definido para $\nu < \mu$, escojamos $(\mu_\xi)_{\xi < \kappa}$ t.q. $\mu = \mathrm{Sup}_\xi(\mu_\xi + 1)$. Esto es posible pues $\mathrm{cf}\,\mu \leq \kappa$. Sea φ_μ la función $\alpha \mapsto \mathrm{Sup}_{\xi < \alpha}(\varphi_{\mu_\xi}(\alpha) + 1)$ $(\alpha < \kappa)$.

Mostremos lo pedido:

Si $\nu, \mu \in \kappa^+$, obviamente $\varphi_\nu <^* \varphi_\mu$ sii $\nu < \mu$, así que $\|\varphi_\mu\| \geq \mu$. Para $\mu \in \kappa^+$, vamos a mostrar la equivalencia en a).

$\llcorner\!\leftarrow\!\urcorner$ Es obvio: $\varphi^* > \varphi_\mu \longrightarrow \|\varphi\| > \|\varphi_\mu\| \geq \mu$.

$\ulcorner\!\rightarrow\!\lrcorner$ Por inducción: Supongamos que $\|\varphi\| > \mu$, $\varphi^* \not> \varphi_\mu$, y que μ es el mínimo para el que hay una tal φ. Sea $\varphi' \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$ t.q. $\mu \leq \|\varphi'\|$, $\varphi' <^* \varphi$. Como $\{\,\alpha : \varphi(\alpha) \leq \varphi_\mu(\alpha)\,\} \notin \mathrm{NS}_\kappa$, $X = \{\,\alpha : \varphi'(\alpha) < \varphi_\mu(\alpha)\,\} \notin \mathrm{NS}_\kappa$. Para $\xi < \kappa$ sea $X_\xi = \{\,\alpha : \varphi'(\alpha) \leq \varphi_{\mu_\xi}(\alpha)\,\}$. $\mu_\xi < \mu$, así que $\|\varphi'\| \geq \mu_\xi$, y por tanto $\varphi'^* > \varphi_{\mu_\xi}$, y $X_\xi \in \mathrm{NS}_\kappa$.

Pero $X = \nabla_\xi X_\xi$, de modo que por el Lema 4.b) $X \in \mathrm{NS}_\kappa$. Esto es una contradicción.

De esta equivalencia es obvio que $\|\varphi_\mu\| = \mu$.

Sea φ'_μ otra función como en a). $\|\varphi'_\mu + 1\| > \|\varphi'_\mu\| = \mu$, así que $\varphi'_\mu + 1^* > \varphi_\mu$. De igual forma $\varphi_\mu + 1^* > \varphi'_\mu$, y tenemos

$$\{\,\alpha : \varphi_\mu(\alpha) \neq \varphi'_\mu(\alpha)\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa\,.$$

b) Dado $\mu < \kappa$, escojamos $\mu_\xi = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi < \mu \\ 0 & \text{si } \mu \leq \xi < \kappa \end{cases}$. Es fácil ver que $\varphi_\mu(\alpha) = \mu$ si $\mu \leq \alpha < \kappa$, por inducción. Como NS_κ contiene todos los conjuntos acotados, puede redefinirse φ_μ en $[0, \mu]$ sin cambiar su $\|\cdot\|$-rango, y b) se sigue de a).

c) Si $\mu = \kappa$, escojamos $\mu_\xi = \xi\, \forall \xi < \kappa$. Entonces $\varphi_\kappa = \mathrm{id}_\kappa$, si escogemos $\varphi_\xi \equiv \xi$, como en b).

d) Si $\psi, \psi' \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$, diremos $\psi =_{\mathrm{NS}_\kappa} \psi'$ sii $\{\,\alpha : \psi(\alpha) \neq \psi'(\alpha)\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa$. En tal caso, $\|\psi\| = \|\psi'\|$.

Si $\psi <^* \varphi$, sea $\psi' =_{\mathrm{NS}_\kappa} \psi$ la función $\psi'(\alpha) = \begin{cases} \psi(\alpha) & \text{si } \psi(\alpha) < \varphi(\alpha) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$. $|\psi'(\alpha)| \leq |\varphi(\alpha)|$ para $\alpha < \kappa$, y $\psi(\alpha) = 0$, así que hay a lo más $\lambda = \left(\prod_{\varphi(\alpha)\neq 0} |\varphi(\alpha)|\right)$ de tales ψ', donde ψ varía entre las funciones $<^*$-menores que φ. Luego, hay a lo más λ ordinales menores que $\|\varphi\|$, y $\|\varphi\| < \lambda^+$.

e) Procedamos por contradicción: Supongamos que $\|\varphi\| \geq \lambda$ para alguna $\varphi \in {}^\kappa\lambda$.

Def. 34. Si $X \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathrm{NS}_\kappa$, $\varphi <^*_X \psi \iff \{\,\alpha \in X : \varphi(\alpha) \geq \psi(\alpha)\,\} \in \mathrm{NS}_\kappa$. Como antes, φ^*_X es bien fundamentado, así que sea

$$\|\varphi\|_X = \mathrm{Sup}\{\, \|\psi\|_X + 1 : \psi <^*_X \varphi\,\}.$$

Nótese que $\varphi <^* \psi \longleftrightarrow \varphi <^*_\kappa \psi$.

Es fácil ver que $\|\varphi\|_X \leq \|\varphi\|_Y$ si $X \supseteq Y \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathrm{NS}_\kappa$.

Sea $\nu \geq \lambda$ mínimo t.q. $\exists X \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathrm{NS}_\kappa, \varphi \in {}^\kappa\lambda\, (\|\varphi\|_X = \nu)$. Fijemos un tal X, y sea

$$I = \{Y \subseteq \kappa : X \cap Y \notin \mathrm{NS}_\kappa \rightarrow \|\varphi\|_{X\cap Y} > \nu\}.$$

Afirmación. *I es un ideal no trivial κ-completo sobre κ.*

Dem: I es no trivial, pues $\mathrm{NS}_\kappa \subseteq I$, $X \notin I$. Es un ideal, por la frase inmediatamente posterior a la definición de $<^*_X$. Para κ-completitud, sean $Y_\alpha \in I$ $(\alpha < \gamma)$ para $\gamma < \kappa$. S.p.d.g., los Y_α (son disyuntos en pares, están contenidos en X, y) no pertenecen a NS_κ.

Esto reduce el problema a mostrar que si $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$, entonces $\|\varphi\|_Y > \nu$ cada vez que $\|\varphi\|_{Y_\alpha} > \nu \forall\alpha$. De hecho, $\forall\psi \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$, y para todo ordinal μ, si $\forall\alpha < \gamma\,(\|\psi\|_{Y_\alpha} \geq \mu)$ entonces $\|\psi\|_Y \geq \mu$. La demostración es completamente análoga a la de la afirmación correspondiente del teorema pasado. $\square_{(\mathbf{Af})}$

Afirmación. *$\exists Y \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus I$, $F \subseteq {}^\kappa\lambda$, $|F| < \lambda$ y $<^*_Y$-cofinal en φ, es decir, si $\psi \in {}^\kappa ORD$ y $\psi <^*_Y \varphi$ entonces $\exists f \in F\,(\psi <^*_Y f <^*_Y \varphi)$.*

Dem: Sea $h \in {}^\kappa\lambda$ la función $\xi \mapsto \mathrm{cf}(\varphi(\xi))$. Hay dos casos:

a) $\exists Y \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus I$ *(h es cte. en Y).*

Sean Y como se afirma, y ρ el valor cte. de h. Por supuesto, ρ es regular. Sea $\big(h_\alpha(\xi)\big)_{\alpha<\rho}$ creciente y cofinal en $\varphi(\xi)$, para cada $\xi \in Y$, y definamos $h_\alpha(\xi) = 0$ si $\xi \notin Y$. Si $\rho > \kappa$, tomemos $F = \{\, h_\alpha : \alpha < \rho \,\}$.

Si $\rho \leq \kappa$, como $2^\rho \leq 2^\kappa < \lambda$, basta tomar

$$F = \{\, f \in {}^\kappa\mathrm{ORD} : \forall\xi < \kappa\,\big(f(\xi) \in \{\, h_\alpha(\xi) : \alpha < \rho \,\}\big) \,\}.$$

b) *No hay tal Y.*

Entonces $\forall\alpha\,\big(\{\, \xi \in X : h(\xi) = \alpha \,\} \in I\big)$. Sea η mínimo t.q. $Y = Y_\eta = \{\, \xi \in X : h(\xi) < \eta \,\} \notin I$. Por κ-completitud, $\mathrm{cf}\,\eta = \kappa$, y η es supremo de cardinales en el rango de h, así que es un cardinal. $\eta < \lambda$ porque λ es regular y $> \kappa$ (y $\eta \leq \lambda$). Sea $F_\xi \subseteq \varphi(\xi)$ cofinal en $\varphi(\xi)$ y de cofinalidad $\mathrm{cf}\big(\varphi(\xi)\big) = h(\xi)$ si $\xi \in Y$, o $\{0\}$ en otro caso.

Así, si $F = \prod_{\xi<\kappa} F_\xi$, F es $<^*_Y$-cofinal y $|F| \leq \eta^\kappa < \lambda$. $\square_{(\mathbf{Af})}$

Sean Y, F como en la afirmación. Por ser F cofinal en φ,

$$\|\varphi\|_Y = \mathrm{Sup}\{\, \|f\|_Y + 1 : f \in F \wedge f <^*_Y \varphi \,\}.$$

Como $Y \subseteq X$, $\|\varphi\|_Y \geq \|\varphi\|_X = \nu$. Pero $Y \notin I$, así que $\|\varphi\|_Y = \nu$. Entonces, si $f \in F$ y $f <^*_Y \varphi$, $\|f\|_Y < \nu$. Pero $\|f\|_Y < \lambda$ pues $f \in {}^\kappa\lambda$ y ν era mínimo. Por regularidad de λ, esto es una contradicción. $\square_{(\mathbf{L24})}$

El terema en sí es técnico, así que en una primera lectura podría pasarse directamente a los corolarios. La demostración dada es la de [GH].

Teorema 27. *Sean κ regular y no contable, $(\delta_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una sucesión continua no decreciente de cardinales infinitos, y $\varphi \in {}^\kappa ORD$. Si*

$$\psi(\alpha) = \delta_\alpha^{+\varphi(\alpha)} \quad y \quad \Delta = 2^\kappa \sum_{\alpha<\kappa} T(\kappa, \delta_\alpha),$$

entonces $T(\psi) \leq \Delta^{+\|\varphi\|}$.

Dem: Por inducción en $\|\varphi\|$.

a) $\|\varphi\| = 0$.

Sea F a.d.t. para ψ. $\{\alpha : \varphi(\alpha) = 0\}$ es estacionario en κ [Lema 24.b)], y por tanto también $X_0 = \{\alpha \text{ límite} : \varphi(\alpha) = 0\}$.

Si $f \in F$, $\alpha \in X_0$, entonces $f(\alpha) < \delta_\alpha$. Por continuidad, $\exists \beta_f(\alpha) < \alpha\, (f(\alpha) < \delta_{\beta_f(\alpha)})$. Por el lema de Fodor, existen $X_f \subseteq X_0$ y $\beta_f < \kappa$ t.q. X_f es estacionario y $f(\alpha) < \delta_{\beta_f}\ \forall \alpha \in X_f$.

Fijos X y β, si $\mathcal{A}_{X,\beta} = \{f \in F : X_f = X, \beta_f = \beta\}$ entonces $|\mathcal{A}_{X,\beta}| \leq T(\kappa, \delta_\beta) \leq \Delta$. Pero a lo más hay 2^κ parejas (X, β) y el resultado se sigue.

b) $\|\varphi\| = \nu > 0$.

Sea F a.d.t. para ψ. Si $f \in F$ definamos $\varphi_f, \psi_f \in {}^\kappa\mathrm{ORD}$ por $\varphi_f(\alpha) = \min\{\beta : |f(\alpha)| \leq \delta_\alpha^{+\beta}\}$, $\psi_f(\alpha) = \delta_\alpha^{+\varphi_f(\alpha)}$.

Ahora bien: $\varphi_f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ a menos que $\varphi_f(\alpha) = \varphi(\alpha) = 0$ $(\alpha < \kappa)$; como $\|\varphi\| = \nu > 0$, $\|\varphi_f\| < \nu \forall f \in F$. Luego, podemos escribir $F = \bigcup_{\mu<\nu} F_\mu$, donde $F_\mu = \{f \in F : \|\varphi_f\| = \mu\}$.

Como $\nu \leq \Delta^{+\nu}$, basta mostrar que $|F_\mu| \leq \Delta^{+\nu}$ $(\mu < \nu)$. De hecho, $|F_\mu| \leq \Delta^{+(\mu+1)}$:

Fijemos $\mu < \nu$, y definamos una aplicación conjuntista H en F_μ (def. 6) por

$$H(f) = \{g \in F_\mu : \forall \alpha < \kappa\, (g(\alpha) \leq f(\alpha))\} \setminus \{f\}.$$

$H(f)$ es a.d.t. para $f+1$. Pero $|f(\alpha)+1| \leq \delta_\alpha^{+\varphi_f(\alpha)} = \psi_f(\alpha)$, así que $|H(f)| \leq T(\psi_f)$. Como $\psi_f(\alpha) = \delta_\alpha^{+\varphi_f(\alpha)}$ y $\|\varphi_f\| = \mu < \nu$, $T(\psi_f) \leq \Delta^{+\mu}$ por hipótesis de inducción. Luego, $|H(f)| \leq \Delta^{+\mu}$ si $f \in F_\mu$. Supongamos, entonces, que $|F_\mu| \geq \Delta^{+(\mu+2)} > 2^\kappa$. Por el teorema de Hajnal, Lema 5, hay un conjunto $F' \subseteq F_\mu$ de cardinalidad $\Delta^{+(\mu+2)}$ libre respeto a H.

Existe, por tanto, una sucesión 1-1 $(f_\xi)_{\xi<(2^\kappa)^+}$, con $f_\xi \in F_\xi$ y $f_\xi \notin H(f_\eta)$ si $\xi < \eta < (2^\kappa)^+$. Esto es, si $\xi < \eta$ hay un $\alpha = \alpha(\xi,\eta) < \kappa$ con $f_\xi(\alpha) > f_\eta(\alpha)$. Pero por el teorema de Erdős-Rado, $(2^\kappa)^+ \to (\omega)^2_\kappa$. Entonces hay una sucesión $(\xi_n)_n$ de elementos de $(2^\kappa)^+$, y un $\alpha < \kappa$ t.q. $f_{\xi_n}(\alpha) > f_{\xi_m}(\alpha)$ para $m > n$.

Esto, por supuesto, es imposible. $\square_{(\mathrm{T27})}$

A pesar de sus peculiaridades individuales, es imposible no notar las analogías entre las 3 demostraciones. Por eso el detalle, quizás excesivo, en que fueron presentadas. Pasemos a los corolarios.

El Teorema 26 se puede deducir con facilidad:

Corolario 10.

a) *Sean $\kappa > \omega$ regular, $(\sigma_\alpha)_\alpha$ una sucesión continua no decreciente de cardinales infinitos, y Δ como antes. Si $\varphi \in {}^\kappa ORD$ y $(\kappa_\alpha)_\alpha$ es una sucesión de cardinales t.q.*

$$\prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta \leq \sigma_\alpha^{+\varphi(\alpha)} \quad \text{para } \alpha < \kappa, \text{ entonces}$$

$$\prod_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha \leq \Delta^{+\|\varphi\|}.$$

b) *Sean $\omega < \kappa < \lambda$ cardinales regulares t.q. $\tau^\kappa < \lambda \forall \tau < \lambda$ con $\operatorname{cf}\tau = \kappa$. Si σ es infinito y $\sigma^\kappa < \sigma^{+\lambda}$, y $(\kappa_\alpha)_\alpha$ es tal que*

$$\forall \alpha < \kappa \left(\prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \sigma^{+\lambda} \right), \quad \textit{entonces}$$

$$\prod_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha < \sigma^{+\lambda}.$$

c) *Vale el Teorema 26.*

Dem: a) Definiendo ψ como antes, por el Lema 22 basta mostrar que $T(\psi) \leq \Delta^{+\|\varphi\|}$, pero esto es justo lo que establece el teorema.

b) Tómese $\sigma_\alpha = \sigma \,\forall \alpha < \kappa$, $\varphi \in {}^\kappa\mathrm{ORD} : \alpha \mapsto \min\{\, \xi : \prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta \leq \sigma^{+\xi} \,\}$ (de modo que $\prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta = \sigma^{+\varphi(\alpha)}$, o $\varphi(\alpha) = 0$). Entonces $\|\varphi\| < \lambda$, por el Lema 24.e). Como Δ, definida como antes, cumple

$$\Delta \leq 2^\kappa \cdot \sigma^\kappa = \sigma^\kappa < \sigma^{+\lambda},$$

tenemos que $\prod_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha \leq \Delta^{+\|\varphi\|} < \Delta^{+\lambda} = \sigma^{+\lambda}$.

c) $\sigma = \aleph_0$ sirve. $\square_{(\mathrm{C10})}$

Corolario 11.

a) *Sean $\kappa > \omega$ regular, $\tau \geq 2$ y ρ cardinales, ξ y η ordinales, $\eta < \kappa$. Sea $\beta = \xi + (\tau^\kappa)^{+(\eta+1)}$; si $\rho^\nu < \aleph_\beta$ para todo $\nu < \kappa$, y $\aleph_\xi^\kappa < \aleph_\beta$, entonces*

$$\rho^\kappa < \aleph_\beta.$$

b) *Con $\kappa > \omega$ regular, $\tau \geq 2$ y ρ cardinales, $\operatorname{cf}\rho = \kappa$, ξ y η ordinales con $\eta < \kappa$, si β es como arriba y $2^\nu < \aleph_\beta \,\forall \nu < \rho$, $\aleph_\xi^\kappa < \aleph_\beta$, entonces $2^\rho < \aleph_\beta$.*

c) *Si ξ, η son ordinales, $\operatorname{cf}(\xi) > \eta, \omega$, y $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^{+(\eta+1)}} \,\forall \alpha < \xi$, entonces $2^{\aleph_\xi} < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^{+(\eta+1)}}$.*

d) *Si ξ, η son ordinales, $\operatorname{cf}(\xi) > \eta, \omega$, y $\aleph_\alpha^\sigma < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^{+(\eta+1)}} \,\forall \sigma < \operatorname{cf}\xi \,\forall \alpha < \xi$, entonces $\beth(\aleph_\xi) = \aleph_\xi^{\operatorname{cf}\xi} < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^{+(\eta+1)}}$.*

Dem: a) En la parte b) el corolario anterior basta tomar $\sigma = \aleph_\xi$, $\lambda = (\tau^\kappa)^{+(\eta+1)}$. La parte d) es un caso particular; b) es análogo, y c) es un caso particular. $\square_{(\mathrm{C11})}$

Los resultados de Shelah en el próximo capítulo van a tornar obsoleta estas cotas: $\forall \xi$ ordinal límite $\left(\aleph_\xi^{\operatorname{cf}\xi} < \aleph_{\left(|\xi|^{\operatorname{cf}\xi}\right)^+}\right)$, aunque nótese que si $\xi = \aleph_\xi$ esto no es realmente una cota. Finalmente:

Corolario 12.

a) *Sean* λ *un cardinal infinito con* $\operatorname{cf}\lambda = \kappa > \omega$, *t.q.* $\forall\rho < \lambda\,(\rho^\kappa < \lambda)$, $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *una sucesión de cardinales estríctamente creciente y continua, que converge a* λ, *y* $\varphi \in {}^\kappa ORD$. *Si* $\prod_{\beta<\alpha}\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha^{+\varphi(\alpha)}\ \forall\alpha < \kappa$ *entonces*

$$\lambda^\kappa < \lambda^{+\|\varphi\|}.$$

b) *[Silver] Si* λ *es infinito,* $\operatorname{cf}\lambda = \kappa > \omega$, $\forall\rho < \lambda\,(\rho^\kappa < \lambda)$, $(\lambda_\alpha)_\alpha$ *es una sucesión como en a), y* $\{\,\alpha < \kappa : \prod_{\beta<\alpha}\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha^{+\mu}\,\}$ *es estacionario en* κ *para algún* $\mu < \kappa$, *entonces*

$$\lambda^\kappa \leq \lambda^{+\mu}.$$

Luego, si $\{\,\alpha < \kappa : \lambda_\alpha^{\operatorname{cf}\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha^+\,\}$ *es estacionario, entonces* $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \lambda^+$.
En particular, si SCH vale para los cardinales de cofinalidad ω, *vale siempre.*
Análogamente, si $2^\tau \leq \lambda^\kappa\,\forall\tau < \lambda$, *entonces* $2^\lambda \leq \lambda^{+\mu}$.

c) *[Silver] Sea* λ *singular límite fuerte,* $\operatorname{cf}\lambda = \kappa > \omega$, *y sean* $\mu < \kappa$ *un ordinal y* $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *una sucesión como en a). Si* $\{\,\alpha < \kappa : \prod_{\beta<\alpha}\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha^{+\mu}\,\}$ *es estacionario en* κ, *entonces* $2^\lambda \leq \lambda^{+\mu}$.

En particular, si λ *es singular,* $\operatorname{cf}\lambda > \omega$, $\mu < \operatorname{cf}\lambda$ *y* $\{\,\sigma < \lambda : 2^\sigma \leq \sigma^{+\mu}\,\}$ *es estacionario en* λ, *entonces* $2^\lambda \leq \lambda^{+\mu}$.

Dem: a) En el Corolario 10.a) basta tomar $\sigma_\alpha = \kappa_\alpha = \lambda_\alpha$.

Los demás casos se siguen con facilidad. Para la segunda parte de b), basta mostrar que $\{\,\alpha : \lambda_\alpha^\kappa = \lambda_\alpha^+\,\}$ es estacionario. Pero si $\mathcal{C} = \{\,\alpha < \kappa : \alpha \text{ es límite y } \forall\mu < \lambda_\alpha\,(\mu^\kappa < \lambda_\alpha)\,\}$, $\mathcal{C}$ es club en κ: Es claro que es cerrado. Para mostrar que es no acotado, procedamos por contradicción y sea $\beta < \kappa$ t.q. si $\alpha > \beta$ es límite, entonces $\mu_\alpha^\kappa > \lambda_\alpha$ para algún $\mu_\alpha < \lambda_\alpha$ ($\mu_\alpha^\kappa = \lambda_\alpha$ no es posible pues $\lambda_\alpha^\kappa \geq \lambda_\alpha^{\operatorname{cf}\alpha} > \lambda$). Sea $(\beta_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una subsucesión continua de los límites $> \beta$ t.q. $\forall\alpha\,(\mu_{\beta_\alpha}^\kappa < \mu_{\beta_{\alpha+1}})$. Entonces β_ω existe porque $\kappa > \omega$, y $\lambda_{\beta_\omega} \in \mathcal{C}$, una contradicción.

Luego, como $\lambda_\alpha^\kappa = \lambda_\alpha^{\operatorname{cf}\lambda_\alpha}$ (por el Lema 2) si $\alpha \in \mathcal{C}$, tenemos lo querido. $\square_{(C12)}$

Los resultados de Silver guardan analogía con los de Scott respecto a la exponencial en medibles, como mostraremos en la siguiente sección. Su demostración original también era similar. Nótese que para cofinalidad ω es necesaria alguna idea nueva. También nótese que las afirmaciones (p.ej., las del corolario pasado, o el uso de rangos por Galvin y Hajnal) recuerdan los argumentos dados en el capítulo anterior al trabajar con medibles.

Shelah generalizó los resultados de [GH] y [Sil2]. Algunos de los suyos eran cotas del mismo estilo de las arriba mostradas, variando los ideales con que trabajaba. Otros eran ampliaciones del método original de Silver (ver también el capítulo 5):

Solovay definió ultrapotencias genéricas. Éstas fueron usadas por Magidor para mostrar el resultado de Silver módulo la existencia de ciertos filtros en ω_1, cuya consistencia se sigue de la de un cardinal Ramsey. Silver trabajó en ZFC, construyendo con forcing una ultrapotencia. Ésta, por supuesto, no era bien fundamentada, pero sí lo era el segmento inicial al cual conseguía reducir su argumentación.

Shelah, en diferentes contextos, ha utilizado este tipo de ultrapotencias. Con su teoría de pcf, y métodos similares a los 2 indicados, también ha obtenido cotas (algunas asumiendo hipótesis adicionales), incluso para cardinales puntos fijos. Ver [Sh2,4] y [Sh7], cáps. V, VI.

2. Cardinales Grandes y Aritmética Cardinal.

a. Cardinales Medibles y GCH.

Es nuestra intención mostrar aquí los resultados de Scott respecto a la exponencial en medibles. Estos son practicamente corolarios inmediatos de nuestro trabajo en el capítulo 0.

Teorema 28. *[Scott] Si κ es medible, $\mathcal{U}$ es una medida normal sobre κ y $2^\kappa > \kappa^+$, entonces $\{\lambda < \kappa : 2^\lambda > \lambda^+\} \in \mathcal{U}$. En consecuencia, κ no es el primer contraejemplo a GCH y, si la contradice, hay κ contraejemplos antes.*

Además, si $\beta < \kappa$ y $\{\lambda : 2^\lambda \leq \lambda^{+\beta}\} \in \mathcal{U}$, $2^\kappa \leq \kappa^{+\beta}$, y si $\{\lambda : 2^\lambda < \lambda^{+\lambda}\} \in \mathcal{U}$, $2^\kappa < \kappa^{+\kappa}$.

Dem: Sea $\mathcal{M} = \mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U})$. Si $\beta < \kappa$ y $\{\lambda : 2^\lambda \leq \lambda^{+\beta}\} \in \mathcal{U}$,

$$\mathcal{M} \models 2^{[\mathrm{id}_\kappa]} \leq [\mathrm{id}_\kappa]^{+j(\beta)}, \quad \text{o} \quad \mathcal{M} \models 2^\kappa \leq \kappa^{+\beta}.$$

Así, en $\mathcal{M}$ y por tanto en V hay una inyección de $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}(\kappa) = \mathcal{P}(\kappa)$ en $(\kappa^{+\beta})^{\mathcal{M}} \leq \kappa^{+\beta}$. El otro resultado se muestra igual. $\square_{(\mathrm{T28})}$

b. Cardinales Fuertemente Compactos y SCH.

En esta sección vamos a demostrar el resultado de Solovay [So]: Si κ es fuertemente compacto entonces SCH vale encima de κ.

Teorema 29. *[Solovay] Sea κ fuertemente compacto.*

a) *Si $\lambda > \kappa$ es regular, $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ (basta asumir λ-compacidad de κ).*
b) *Si $\mu \geq \kappa$ y λ son regulares y $2^\lambda \leq \mu$, $\mu^\lambda = \mu$ (basta asumir μ-compacidad de κ).*
c) *Si $\lambda > \kappa$ es singular, $\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} = \lambda^+ + 2^{\mathrm{cf}\,\lambda}$ (basta asumir λ^+-compacidad de κ).*

Dem: c) Usemos el Corolario 12.b). Sea $\lambda > \kappa$. Por a), $\lambda^{\aleph_0} \leq \lambda^{<\kappa} \leq (\lambda^+)^{<\kappa} = \lambda^+$, y el resultado se sigue.

b) Si $\mu \geq \kappa$ y λ son regulares, y $\lambda < \kappa$ el resultado se sigue de a) (Si $\mu = \kappa$, λ es menor que κ y $\kappa^\lambda = \kappa(<\kappa)^\lambda = \kappa$), así que podemos suponer $\kappa \leq \lambda < 2^\lambda < \mu$.

Sean $\mathcal{U}$ fino sobre $[\lambda]^{<\kappa}$ y $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M = \mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U})$ la sumersión correspondiente. Por el Teorema 18 y a), $j(\kappa) < \left(2^{\lambda^{<\kappa}}\right)^+ = (2^\lambda)^+ \leq \mu$. Luego, $\mu^{<j(\kappa)} = \mu$ en M, pues $\rho^{<\kappa} = \rho$ (en V) para $\rho \geq \kappa$.

Nótese que $\mu^\lambda = \left|[\mu]^\lambda\right|$. Si $x \in [\mu]^\lambda$, $x \subseteq Y \subseteq \mu$ para algún Y con $|Y| \leq 2^\lambda$, $M \models |Y| < j(\kappa)$ —Si el Y obtenido en el Teorema 16 no era subconjunto de μ, tómese su intersección con μ—. Hay $(\mu^{<j(\kappa)})^M = \mu$ tales Y, todos con a lo más $(2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$ tales x. Entonces

$$\mu \leq \left|[\mu]^\lambda\right| \leq 2^\lambda \mu = \mu.$$

a) La idea es particionar $[\lambda]^{<\kappa}$ adecuadamente. Seguimos [J1].

Def. 35.

(1) Un ultrafiltro sobre S es *uniforme* sii todos sus elementos tienen tamaño $|S|$.
(2) Un ultrafiltro sobre λ es (κ, λ)-*especial* [(κ, λ)-regular según Jech] sii existe una familia $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda} \subseteq \lambda$ t.q. $\forall \alpha < \lambda\,(|M_\alpha| < \kappa)$ y $\forall \gamma < \lambda\,(\gamma \in M_\alpha$ para casi todo $\alpha)$.

Lema 25. *Si κ es fuertemente compacto y $\lambda > \kappa$ es regular, existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre λ, uniforme, κ-completo y (κ, λ)-especial t.q. casi todo $\alpha < \lambda$ tiene cofinalidad $< \kappa$.*

Dem: Sean $\mathcal{U}$ una medida fina sobre $[\lambda]^{<\kappa}$, y $j : V \xrightarrow{\prec} \mathrm{Ult}(V, \mathcal{U})$ la sumersión asociada. $j(\lambda) > [f] = \mathrm{Sup}_{\gamma<\lambda}\, j(\gamma)$, pues si $g \in {}^{[\lambda]^{<\kappa}}\lambda$ es la función $x \mapsto \mathrm{Sup}\, x$, $\{\, x : \alpha \leq g(x) < \lambda \,\} \supseteq \{\alpha\}^{\frown} \in \mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{D}$ el ultrafiltro sobre λ dado por

$$X \in \mathcal{D} \longleftrightarrow f^{-1}(X) \in \mathcal{U} \wedge X \subseteq \lambda.$$

$\mathcal{D}$ es κ-completo y no principal. $[\mathrm{id}_\lambda]_{\mathcal{D}} > \gamma\, \forall \gamma < \lambda$, así que $\mathcal{D}$ es uniforme, por regularidad. Que $\mathcal{D}$ es el ultrafiltro buscado se sigue, primero, de que

$$\mathrm{cf}\big(f(x)\big) < \kappa\ \mathcal{U}\text{-c.s.}$$

En efecto, $f(x) = \mathrm{Sup}\{\, \alpha \in x : \alpha < f(x) \,\}\,\mathcal{U}$-c.s., pues si $h(x) = \mathrm{Sup}\{\, \alpha \in x : \alpha < f(x) \,\}$ y $\gamma < \lambda$, $\gamma \leq h(x)\,\mathcal{U}$-c.s. porque $\gamma \in x$ para casi todo x. Entonces $[h] \geq j(\gamma)$, y tomando supremos resulta $[f] \leq [h] \leq [f]$.

Para probar que $\mathcal{D}$ es (κ, λ)-especial, sea $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una sucesión de subconjuntos de λ t.q. $A_\alpha \subseteq \alpha$, $|A_\alpha| < \kappa$ y $\mathrm{Sup}\, A_\alpha = \alpha\,\mathcal{D}$-c.s. Tomemos $A_\alpha = \emptyset$ si $\mathrm{cf}\, \alpha \geq \kappa$. Sea (en $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{D})$) $A = [(A_\alpha)_\alpha]_{\mathcal{D}}$. $A \subseteq [\mathrm{id}_\lambda]_{\mathcal{D}}$ es cofinal ahí, y como $[\mathrm{id}_\lambda]_{\mathcal{D}} = \mathrm{Sup}_{\gamma<\lambda}\, j_{\mathcal{D}}(\gamma)$, si $\alpha < \lambda$ podemos hallar un $\alpha' > \alpha$ con

$$A \cap \{\, \beta : j_{\mathcal{D}}(\alpha) \leq \beta < j_{\mathcal{D}}(\alpha') \,\} \neq \emptyset.$$

Entonces podemos definir una sucesión $(\alpha_\beta)_{\beta<\lambda}$ de ordinales $< \lambda$ continua, creciente, y con $A \cap \big[j_{\mathcal{D}}(\alpha_\beta), j_{\mathcal{D}}(\alpha_{\beta+1})\big) \neq \emptyset\, \forall \beta$.

Luego, $A_\alpha \cap [\alpha_\beta, \alpha_{\beta+1}) \neq \emptyset$ para casi todo α y, si llamamos $M_\alpha = \{\, \beta : [\alpha_\beta, \alpha_{\beta+1}) \cap A_\alpha \neq \emptyset \,\}$, notando que $|A_\alpha| < \kappa$ y que los $[\alpha_\beta, \alpha_{\beta+1})$ son disyuntos 2 a 2, $(M_\alpha)_\alpha$ prueba que $\mathcal{D}$ es (κ, λ)-especial. $\square_{(\mathbf{L25})}$

Sea $\mathcal{D}$ (κ, λ)-especial sobre λ, como en el lema, y tomemos una sucesión $(M_\alpha)_\alpha$ de testigos. Si $x \in [\lambda]^{<\kappa}$, como $\mathcal{D}$ es κ-completo, $x \subseteq M_\alpha$ para casi todo α, de modo que $x \in \mathcal{P}(M_\alpha)$ para algún $\alpha < \lambda$.

Entonces $[\lambda]^{<\kappa} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{P}(M_\alpha)$, y como κ es inaccesible se tiene lo querido. $\square_{(\mathbf{T29})}$

c. Cardinales Fuertes y GCH.

Las propiedades de reflexión de los medibles se pueden llevar más lejos con los supercompactos, de modo que de hecho en ocasiones hallamos propiedades de *extensión*, como en el teorema que sigue. Su enunciado no es el más general posible, y su demostración no es mucho más complicada que la correspondiente para medibilidad:

Teorema 30. *Si κ es λ-supercompacto y $2^\mu = \mu^+ \, \forall \mu < \kappa$, entonces $2^\rho = \rho^+ \, \forall \rho \leq \lambda$. Luego, si κ es supercompacto, GCH es absoluta para V_κ. Para esto, basta que κ sea fuerte; de hecho, si κ es α-fuerte y GCH vale bajo κ, entonces vale bajo $\kappa + \alpha$.*

Dem: Sea $j : V \xrightarrow{\preceq} M$ testigo de que κ es α-fuerte. Si $\rho \leq \kappa + \alpha$, como $\kappa + \alpha < j(\kappa)$, $(2^\rho = \rho^+)^M$. Pero $V_{\kappa+\alpha} \subseteq V$, así que $\mathcal{P}(\rho)^M = \mathcal{P}(\rho)$, de modo que $2^\rho \leq (2^\rho)^M = (\rho^+)^M = \rho^+$.

De la misma forma, si $2^\mu \leq \mu^{+\beta} \, \forall \mu < \kappa$, donde $\beta < \kappa$, entonces $2^\rho \leq \rho^{+\beta} \, \forall \rho < \kappa + \alpha$. Por último, nótese que si κ es λ-supercompacto, el argumento vale incluso para λ. $\square_{(T30)}$

En contraste, aun no se sabe si GCH es absoluta para V_κ cuando κ es fuertemente compacto.

3. Forcing de Easton.

En esta sección mostraremos el resultado de Easton respecto a la libertad de la exponencial en los regulares. Easton utiliza una noción de forcing que es una clase propia. En general, como muestra [Ku5], un tal forcing no preserva ZF. La pregunta de cuándo lo hace es difícil y no la trataremos aquí. [Fri2] aisla una noción (*Tameness*) que lo asegura. El forcing tipo Easton es dócil (tame), así que en este caso funciona. En el contexto de modelos de valores booleanos [TZ] también trata forcing con clases propias con cierta generalidad.

Teorema 31. *Asuma GCH. Sea F una función de la clase de los regulares en los cardinales t.q. $\forall \kappa, \lambda$ regulares*

i) $\operatorname{cf} F(\kappa) > \kappa$.
ii) $F(\kappa) \leq F(\lambda)$ *si* $\kappa \leq \lambda$.

Entonces hay una extensión genérica $V[G]$ que preserva cofinalidades (y cardinales) t.q.

$$\forall \kappa \text{ regular} \left(2^\kappa = F(\kappa)\right)^{V[G]}.$$

Esta extensión satisface SCH.

Observación. Suponer GCH es una posible limitación a la generalidad del teorema. Pero, con un argumento similar al que sigue, puede mediante forcing (colapsando cardinales) conseguirse que valga GCH[1], aunque esto, claro, puede colapsar cardinales grandes, así que de todos modos el resultado *no* da completa libertad a la exponencial de los regulares. De la teoría de core models, sin embargo, se sabe que GCH es compatible con la existencia de cardinales grandes (incluso, de Woodin).

Dem: Informalmente, $\mathbb{P}$ sería una clase de funciones (Reg es la clase de los regulares):

$$\mathbb{P} = \{ p \in \prod_{\kappa \in \mathrm{Reg}} \mathrm{Add}(\kappa, F(\kappa)) : \forall \lambda \in \mathrm{Reg} \left(\left| \{ (\kappa, (\alpha, \beta)) : \kappa \leq \lambda, (\alpha, \beta) \in \operatorname{Dom} p(\kappa) \} \right| < \lambda \right) \}$$

[1] Como $\mathrm{Coll}(\kappa, \lambda)$, con κ regular y $\lambda^{<\kappa} = \lambda \geq \kappa$, colapsa λ a cardinalidad κ, preserva los cardinales $\leq \kappa$ y los mayores que λ, basta considerar el producto de Easton de $\mathrm{Coll}((\beth_\alpha)^+, \beth_{\alpha+1})$. Esto hace en $V[G]$ que $((\beth_\alpha)^+)^V = \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. Ver [J1].

con el orden natural.

La condición que deben satisfacer las funciones en $\mathbb{P}$ sólo es restrictiva para λ (debilmente) inaccesible.

Este es el producto de Easton de las nociones $\mathrm{Add}(\kappa, F(\kappa))$. Por supuesto, $\mathbb{P}$ no tiene sentido pues sus elementos son clases propias. La definición puede modificarse, para admitir sólo conjuntos como elementos, y esto es lo que haremos aquí:

$\mathbb{P}$ es la clase de funciones p cuyo dominio es un conjunto de regulares $\mathcal{A}$, con rango en $\prod_{\kappa \in \mathcal{A}} \mathrm{Add}(\kappa, F(\kappa))$ que satisfacen la condición de arriba.

Omitimos la demostración de que forcing con $\mathbb{P}$ satisface ZFC; [J1] y [TZ] proveen los detalles. $\mathbb{P}$ se comporta como si fuera un conjunto para lo que nos concierne.

Para $p \in \mathbb{P}$ y λ regular sean $p^{\leq\lambda} = p \restriction_{\{\kappa : \kappa \leq \lambda\}}$ y $p^{>\lambda} = p \restriction_{\{\kappa : \kappa > \lambda\}}$, de modo que $p = p^{\leq\lambda} \cup p^{>\lambda}$, y sean $\mathbb{P}^{\leq\lambda} = \{p^{\leq\lambda} : p \in \mathbb{P}\}$ y $\mathbb{P}^{>\lambda} = \{p^{>\lambda} : p \in \mathbb{P}\}$. Así, $\mathbb{P}^{\leq\lambda}$ es el producto de Easton de los $\mathrm{Add}(\kappa, F(\kappa))$ con κ regular $\leq \lambda$, y $\mathbb{P}^{>\lambda}$ es el producto de Easton de los restantes.

Lo importante aquí es que $\mathbb{P}$ es isomorfo a $\mathbb{P}^{\leq\lambda} \times \mathbb{P}^{>\lambda}$.

Lema 26. *$\mathbb{P}^{\leq\lambda}$ es λ^+-cc.*

(Sin GCH, esto vale para λ regular con $2^{<\lambda} = \lambda$).

Dem: Si $p \in \mathbb{P}^{\leq\lambda}$ y $d(p) = \bigcup\{\{\kappa\} \times \mathrm{Dom}(p(\kappa)) : \kappa \in \mathrm{Dom}\, \mathbb{P}^{\leq\lambda}\}$, por definición de $\mathbb{P}$ $|d(p)| < \lambda$. Sea $(p_\alpha)_{\alpha<\lambda^+}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{P}^{\leq\lambda}$. Por el Lema 6, del sistema Δ, (como $2^{<\lambda} = \lambda$) hay un $X \in [\lambda^+]^{\lambda^+}$ t.q. $\{d(p_\alpha) : \alpha \in X\}$ es un sistema Δ. Sea r su raíz. $2^{|r|} \leq 2^{<\lambda} = \lambda$, así que por regularidad de λ^+ hay un $Y \in [X]^{\lambda^+}$ con $\forall \alpha, \beta \in Y\, \forall (\kappa, (\gamma, \delta)) \in r\, (p_\alpha(\kappa)(\gamma, \delta) = p_\beta(\kappa)(\gamma, \delta))$.

Es decir, los p_α con $\alpha \in Y$ son compatibles. $\square_{(\mathrm{L26})}$

Lema 27. *$\mathbb{P}^{>\lambda}$ es λ^+-cerrado.*

Dem: $\mathbb{P}^{>\lambda}$ es 'bien comportado': De hecho, si $C \in [\mathbb{P}^{>\lambda}]^{\leq\lambda}$ consiste de condiciones compatibles, $\bigcup C \in \mathbb{P}^{>\lambda}$. $\square_{(\mathrm{L27})}$

El siguiente resultado se conoce como *Lema de Easton*, es fundamental en nuestro argumento, y ha sido muy usado también en otros contextos.

Lema 28. *[Easton] Sean $\mathbb{P}$ una noción κ-cc, $\mathbb{Q}$ una κ-cerrada. Entonces, si $G_1 \times G_2$ es $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico, toda función $f : \lambda \to V$ en $V[G_1 \times G_2]$ está en $V[G_1]$ para $\lambda < \kappa$; $\Vdash_{\mathbb{Q}} \check{\mathbb{P}}$ es κ-cc, y genéricos para $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son mutuamente genéricos.*

Dem: Si τ es un $\mathbb{Q}$-nombre, $q \in \mathbb{Q}$ y

$$q \Vdash \tau : \kappa \to \check{\mathbb{P}} \text{ enumera una anticadena,}$$

por inducción defínanse $(q_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in {}^\kappa\mathbb{Q}$ y $(p_\alpha)_\alpha \in {}^\kappa\mathbb{P}$ t.q. $q_0 = q$, $\forall \alpha < \kappa\, q_{\alpha+1} \Vdash \tau(\alpha) = \check{p}_\alpha$ (usando que $\mathbb{Q}$ es κ-cerrada). Entonces $(p_\alpha)_\alpha$ es una anticadena de $\mathbb{P}$ en V, de tamaño κ, una contradicción. Por tanto, $\Vdash_{\mathbb{Q}} \check{\mathbb{P}}$ es κ-cc.

Que los genéricos para $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ sean mutuamente genéricos quiere decir que si G_1 es $\mathbb{P}$-genérico y G_2 es $\mathbb{Q}$-genérico, G_1 es de hecho $\mathbb{P}$-genérico sobre $V[G_2]$, cf. los comentarios en el capítulo 0 luego de la definición de forcing iterado. Pero G_1 es $\mathbb{P}$-genérico sii es un filtro que intersecta toda anticadena maximal ([Sh3], cap. I). Como G_1 es $\mathbb{P}$-genérico sobre V, sigue siendo un filtro en $V[G_2]$. Si $A \in V[G_2]$ es una anticadena maximal de $\mathbb{P}$, $(|A| < \kappa)^{V[G_2]}$ y, como $\mathbb{Q}$ es κ-cerrado, $A \in V$. Entonces $A \cap G_1 \neq \emptyset$, y G_1 es $\mathbb{P}$-genérico sobre $V[G_2]$.

Sea $\lambda < \kappa$. Como todo conjunto está en biyección con un ordinal, para mostrar que $({}^{\lambda}V)^{V[G_1 \times G_2]} = ({}^{\lambda}V)^{V[G_1]}$ basta ver que $({}^{\lambda}ORD)^{V[G_1 \times G_2]} = ({}^{\lambda}ORD)^{V[G_1]}$. Supongamos que $V[G_1 \times G_2] \models f \in {}^{\lambda}ORD$. $V[G_1 \times G_2] = V[G_1][G_2] = V[G_2][G_1]$, así que sea τ un $\mathbb{P}$-nombre sobre $V[G_2]$ para f. Como $\mathbb{P}$ es κ-cc en $V[G_2]$, podemos codificar a τ como una función φ_τ de $\mathbb{P}$ en ORD (con rango los valores posibles del rango de la función que τ nombra), $|\varphi_\tau| < \kappa$. Como $\mathbb{Q}$ es κ-cerrada, esto implica $\tau \in V$. $\square_{(L28)}$

Si $\mathbb{P}$ no preserva cofinalidades, sean G $\mathbb{P}$-genérico y $\theta > \omega$ regular (en V) t.q. $\lambda = cf(\theta)^{V[G]} < \theta$. λ es regular en $V[G]$ y por tanto en V. Como $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^{\leq\lambda} \times \mathbb{P}^{>\lambda}$, podemos escribir $V[G] = V[G_1][G_2]$ con G_1 $\mathbb{P}^{\leq\lambda}$-genérico sobre V y G_2 $\mathbb{P}^{>\lambda}$-genérico sobre $V[G_1]$. Si $f : \lambda \to \theta \in V[G]$ es cofinal, por el lema de Easton $f \in V[G_1]$ implica que ahí θ no es regular, pero esto contradice que $\mathbb{P}^{\leq\lambda}$ sea λ^+-cc ($\lambda^+ < \theta$, porque θ es límite), y por tanto preserva cofinalidades $\geq \lambda^+$.

Sean ρ regular y G $\mathbb{P}$-genérico. $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^{\leq\rho} \times \mathbb{P}^{>\rho}$. De nuevo por el lema de Easton todo subconjunto de ρ en $V[G]$ está en $V[G_1]$, donde $G_1 \times G_2$ y G se corresponden como arriba. Entonces $(2^\rho)^{V[G]} = (2^\rho)^{V[G_1]}$. Como

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{P}^{\leq\rho}| &\leq \left| \prod_{\theta \in \mathrm{Reg} \cap [\omega,\rho]} \mathrm{Add}(\theta, F(\theta)) \right| \\
&\leq \prod_{\theta \in \mathrm{Reg} \cap [\omega,\rho]} 2^{<\theta} F(\theta)^{<\theta} = F(\rho),
\end{aligned}
$$

por GCH (recuérdese que $\mathrm{cf}\, F(\theta) > \theta$), y $(F(\rho)^\rho)^\rho = F(\rho)$ también por GCH, por el Lema 14.c) $(2^\rho)^{V[G_1]} \leq F(\rho)$.

Para la desigualdad faltante, haciendo $A_{\beta,\rho} = \{\alpha < \rho : \exists p \in G\,(p(\rho,(\alpha,\beta)) = 1)\}$ $(\beta < F(\rho))$, si $\beta < \gamma < F(\rho)$ entonces $A_{\beta,\rho} \neq A_{\gamma,\rho}$, y tenemos $F(\rho)$ subconjuntos distintos de ρ en $V[G]$.

Luego, $\left(2^\rho = F(\rho)\right)^{V[G]}$.

Sólo hace falta mostrar que SCH vale en $V[G]$:

Sea κ singular. Si $f : \mathrm{cf}\,\kappa \to \kappa \in V[G]$, entonces $f \in V[G_1]$ donde G_1 es $\mathbb{P}^{\leq \mathrm{cf}\,\kappa}$-genérico. Si $(2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa)^{V[G]}$ entonces $F(\mathrm{cf}\,\kappa) < \kappa$ y $(\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa})^{V[G]} = (\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa})^{V[G_1]} \leq (2^\kappa)^{V[G_1]} \leq \left(F(\mathrm{cf}\,\kappa)\right)^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$ (por GCH), otra vez usando el Lema 14.c).

Esto completa la prueba. $\square_{(T31)}$

4. Con($\neg$SCH).

En la sección anterior mostramos que la exponencial es en esencia arbitraria, al restringirla a los regulares. El modelo construido satisface SCH, así que en los singulares no da ninguna libertad. En contraste a todo lo mostrado hasta ahora en este capítulo, nos proponemos construir un modelo donde SCH falle. Por el resultado de Silver, por supuesto buscaremos un contraejemplo de cofinalidad ω.

a. Con($\exists\kappa\,\kappa$ *medible y* $2^\kappa > \kappa^+$).

Comenzamos con un resultado, también debido a Silver ([Sil1), que nos permitirá construir el contraejemplo: Asumiendo la consistencia de un supercompacto es consistente que haya un medible que contradiga GCH.

Teorema 32. *[Silver] Si κ es κ^{++}-supercompacto y $2^\kappa = \kappa^+$, entonces hay un poset $\mathbb{P}$ con*

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \kappa \text{ es medible y } 2^\kappa = \kappa^{++}.$$

Observación. El resultado de Silver vale con κ^+-supercompacidad, pero la prueba es más complicada que la que presentamos.

Seguimos [Ba], ver también [J1]. Usaremos un forcing de tipo *Easton inverso* (reverse Easton). La razón del nombre es que si $\mathbb{P}$ es el forcing de Easton usual, como en la sección anterior, $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^{\leq\kappa} \times \mathbb{P}^{>\kappa}$, donde κ es regular, y una extensión $\mathbb{P}$-genérica puede verse como *primero* forzando con $\mathbb{P}^{\leq\kappa}$, y *luego* con $(\mathbb{P}^{>\kappa})^{\mathrm{V}}$. Si forzáramos con $\mathbb{P}^{\leq\kappa}$ y luego con $(\mathbb{P}^{>\kappa})^{\mathrm{V}[G]}$, donde G es $\mathbb{P}^{\leq\kappa}$-genérico, casi con seguridad colapsaríamos cardinales, y el trabajo hecho por $\mathbb{P}^{\leq\kappa}$ 'se perdería'. Así que forzar con $\mathbb{P}$ *debería* pensarse como forzar *primero* con $\mathbb{P}^{>\kappa}$ y *luego* con $\mathbb{P}^{\leq\kappa}$ (en el sentido de V o de V[G], no habría problema).

En el forcing de Easton inverso precisamente *no* hacemos esto. La siguiente demostración en general es sencilla, excepto por un detalle técnico que omitiremos, pero que puede encontrarse en [Ba].

Dem: Sea $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ testigo de la κ^{++}-supercompacidad de κ. $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$ es una iteración de $\kappa + 1$ pasos, dada por:

$\mathbb{P}_0 = \{0\}$. Si se tiene $\mathbb{P}_\alpha$, sea $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ t.q.

$$\Vdash_\alpha \dot{\mu}_\alpha \text{ es el menor regular } \geq \operatorname{Sup}_{\beta<\alpha} \check{\aleph}_{\beta+3} \wedge \dot{\mathbb{Q}}_\alpha = \operatorname{Add}(\dot{\mu}_\alpha, \dot{\mu}_\alpha^{++});$$

y si α es límite sea

$$\mathbb{P}_\alpha = \begin{cases} \varinjlim_{\beta<\alpha} \mathbb{P}_\beta & \text{si } \alpha \text{ no es fuertemente inaccesible} \\ \varprojlim_{\beta<\alpha} \mathbb{P}_\beta & \text{si sí lo es} \end{cases}$$

(si κ va a ser medible, y $2^\kappa > \kappa^+$, debemos tener $2^\mu > \mu^+$ para muchos cardinales $\mu < \kappa$. Al tomar límite directo en los límites no inaccesibles evitamos colapsar singulares, y la condición sobre el tamaño de $\dot{\mu}_\alpha$ evita que se superpongan, quizás anulándose, las violaciones a GCH que se van obteniendo —y también evita que en los singulares se presenten problemas con SCH 'antes de tiempo'—. No es necesario modificar la exponencial en tantos cardinales; [J1], p. ej., sólo se preocupa por los inaccesibles).

Sean $G = G_{\kappa+1}$ $\mathbb{P}_{\kappa+1}$-genérico sobre V y $G_\alpha = \{p\restriction_\alpha : p \in G_{\kappa+1}\}$ para $\alpha \leq \kappa$.

Afirmación. *$\mathbb{P}_\kappa$ es κ-cc, $|\mathbb{P}_\alpha| < \kappa$ para $\alpha < \kappa$, $|\mathbb{P}_\kappa| = \kappa$, $\Vdash_\kappa \dot{\mu}_\kappa = \kappa$.*

Dem: Dividimos la prueba en un par de lemas:

Lema 29. *Suponga que* $\mathbb{P}$ *es* λ*-cc,* $|\mathbb{P}| \leq \kappa$*,* $\kappa^{<\lambda} = \kappa$ *y* $\Vdash_{\mathbb{P}} |\dot{\mathbb{Q}}| \leq \kappa$*. Entonces*

$$|\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}| \leq \kappa.$$

Dem: S.p.d.g. $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{Q}} \subset \kappa$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Basta ver que $|\{\dot{q} : p \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\}| \leq \kappa$. Así, para $\dot{q}$ t.q. $p \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$ sea $f_{\dot{q}} \in {}^{\kappa}V$ una función que asocia con cada α una anticadena maximal de $\{r \in \mathbb{P} \restriction_p \, : r \Vdash \dot{q} \doteq \alpha\}$. Como $\mathbb{P}$ es λ-cc, $|\{\alpha : f(\alpha) \neq 0\}| < \lambda$, así que a lo más hay $\kappa^{<\lambda} = \kappa$ de tales funciones $f_{\dot{q}}$. Si $f_{\dot{q}_1} = f_{\dot{q}_2}$ entonces $p \Vdash \dot{q}_1 = \dot{q}_2$, y el resultado se sigue. $\square_{(L29)}$

Por inducción, si $|\alpha| < \kappa$, $|\mathbb{P}_\alpha| < \kappa$ y $\Vdash_\alpha \dot{\mu}_\alpha < \kappa$. Esto es inmediato del lema para α sucesor, y es claro (κ es medible en cada paso, y los inaccesibles 'grandes' se preservan, por el Corolario 6) si α es límite.

Como $\mathbb{P}_\kappa = \varinjlim_{\alpha<\kappa} \mathbb{P}_\alpha$, $|\mathbb{P}_\kappa| = \kappa$.

Lema 30. *Suponga*

a) $\mathbb{P}_\alpha = \varinjlim_{\beta<\alpha} \mathbb{P}_\beta$.

b) *Si* $\beta < \alpha$ *entonces* $\mathbb{P}_\beta$ *es* κ*-cc.*

c) *Si* $\operatorname{cf} \alpha = \kappa$*,* $\{\beta < \alpha : \mathbb{P}_\beta = \varinjlim_{\gamma<\beta} \mathbb{P}_\gamma\}$ *es estacionario en* α*.*

Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ *es* κ*-cc.*

Dem: Sean $p, q \in \mathbb{P}_\alpha$ t.q. $\operatorname{supt} p \cup \operatorname{supt} q \subseteq \beta < \alpha$, $p \restriction_\beta \|_{\mathbb{P}_\beta} q \restriction_\beta$. Entonces basta definir $r = \rho^\frown(\mathbf{1}_\gamma)_{\gamma\in[\beta,\alpha)}$ donde $\rho \in \mathbb{P}_\beta$ es extensión común de $p \restriction_\beta$ y $q \restriction_\beta$, y r extiende a p y q.

Así, por contradicción supongamos que A es una anticadena en $\mathbb{P}_\alpha$ de tamaño κ. Como $\mathbb{P}_\alpha$ es el límite directo de $(\mathbb{P}_\beta)_{\beta<\alpha}$, si $p \in \mathbb{P}_\alpha$, $\exists \beta < \alpha (\operatorname{supt} p \subseteq \beta)$. Si $\operatorname{cf} \alpha \neq \kappa$, hay un $B \in [A]^\kappa$ y un $\beta < \alpha$ t.q. $\forall p \in B (\operatorname{supt} p \subseteq \beta)$ [Si $\operatorname{cf} \alpha < \kappa$, tome $(\beta_\gamma)_{\gamma<\operatorname{cf}\alpha}$ cofinal en α, $B_\gamma = \{p \in A : \operatorname{supt} p \subseteq \beta_\gamma\}$, y alguno de los B_γ debe servir como B. Si $\operatorname{cf} \alpha > \kappa$, liste A como $(p_\gamma)_{\gamma<\mu}$, donde $\kappa \leq \mu < \kappa^+$, de modo que $\delta < \gamma$ implique $\bigcup \operatorname{supt} p_\delta \leq \bigcup \operatorname{supt} p_\gamma$, y tome $B = \{p_\gamma : \gamma < \kappa\}$]. Entonces, por el párrafo anterior, $\{p \restriction_\beta : p \in B\}$ contradiría que $\mathbb{P}_\beta$ es κ-cc.

Si $\operatorname{cf} \alpha = \kappa$, liste $A = \{p_\beta\}_{\beta<\kappa}$, y sea $(\alpha_\beta)_\beta$ continua, creciente y cofinal en α. Sea $f : \kappa \to \kappa$ la función dada por $f(\beta) = \min\{\gamma : \operatorname{supt}(p_\beta \restriction_{\alpha_\beta}) \subseteq \alpha_\gamma\}$. Como, por hipótesis, $\{\beta : \mathbb{P}_\beta = \varinjlim_{\gamma<\beta} \mathbb{P}_\gamma\}$ es estacionario en α, f es regresiva en el estacionario $\{\beta : \beta \text{ es límite y } \mathbb{P}_{\alpha_\beta} = \varinjlim_{\gamma<\alpha_\beta} \mathbb{P}_\gamma\}$, así que por Fodor es constante en un estacionario, digamos S, $f``S = \{\gamma\}$. S.p.d.g. (sólo importa que $|S| = \kappa$) $\beta_1, \beta_2 \in S$, $\beta_1 < \beta_2$ implican $\operatorname{supt} p_{\beta_1} \subseteq \alpha_{\beta_2}$.

Por la κ-cc en $\mathbb{P}_{\alpha_\gamma}$, hay $\beta_1, \beta_2 \in S$ con $p_{\beta_1} \restriction_{\alpha_\gamma} \| \, p_{\beta_2} \restriction_{\alpha_\gamma}$ $(\beta_1 < \beta_2)$. Sea r extensión común (en $\mathbb{P}_{\alpha_\gamma}$) y defina $q \in \mathbb{P}_\alpha$ por

$$q(\beta) = \begin{cases} r(\beta) & \text{si } \beta < \alpha_\gamma \\ p_{\beta_1}(\beta) & \text{si } \beta \in [\alpha_\gamma, \alpha_{\beta_2}) \\ p_{\beta_2}(\beta) & \text{si } \beta \in [\alpha_{\beta_2}, \alpha) \end{cases}.$$

Entonces q extiende a p_{β_1} y p_{β_2}, lo que es una contradicción. $\square_{(L30)}$

Corolario 13. *Si κ es Mahlo, $|\mathbb{P}_\beta| < \kappa \forall \beta < \kappa$ y $\mathbb{P}_\beta = \varinjlim_{\gamma<\beta} \mathbb{P}_\gamma$ cuando $\beta \leq \kappa$ es fuertemente inaccesible, entonces $\mathbb{P}_\kappa$ es κ-cc.* $\square_{(C13)}$

Como κ es medible, es Mahlo, y por el corolario $\mathbb{P}_\kappa$ es κ-cc, así que $\Vdash_\kappa \kappa$ `es regular`, y por tanto $\Vdash_\kappa \dot{\mu}_\kappa = \kappa$. $\square_{(Af)}$

Como $\alpha < \kappa$ implica $|\mathbb{P}_\alpha| < \kappa$, s.p.d.g. $\mathbb{P}_\alpha \in V_\kappa \forall \alpha < \kappa$, así que j es la identidad en cada $\mathbb{P}_\alpha$ y $j(\mathbb{P}_\alpha) = \mathbb{P}_\alpha$.

En M $j(\mathbb{P})$ es una iteración de $j(\kappa)+1$ pasos, $(\mathbb{P}^M_\alpha)_{\alpha \leq j(\kappa)+1}$, y $\mathbb{P}^M_\kappa = \varinjlim_{\alpha<\kappa} \mathbb{P}^M_\alpha = \varinjlim_{\alpha<\kappa} j(\mathbb{P}_\alpha) = \varinjlim_{\alpha<\kappa} \mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_\kappa$.

De hecho, $\mathbb{P}^M_{\kappa+1} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$: Sean $p \in \mathbb{P}_\kappa$, $\dot{q} \in \operatorname{Dom} \dot{\mathbb{Q}}_\kappa$ t.q. $p \Vdash_\kappa \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}_\kappa$. Por la κ-cc de $\mathbb{P}_\kappa$, $\kappa^{++} = (\kappa^{++})^{V[G_\kappa]}$. Entonces $p \Vdash_\kappa \operatorname{Dom} \dot{q} \subset \kappa \times \kappa^{++}$, $|\dot{q}| < \kappa$. Luego, por la κ-cc, podemos hallar un $\mathcal{D} \in [\kappa^{++}]^{<\kappa}$ t.q. $p \Vdash_\kappa \operatorname{Dom} \dot{q} \subset \check{\mathcal{D}}$. Si $\alpha \in \mathcal{D}$, sea $A^{\dot{q}}_{\alpha,i}$ una anticadena maximal de $\{r \in \mathbb{P}_\kappa \restriction_p : r \Vdash \dot{q}(\alpha) = i.\}$, $i \in 2$, y nótese que si $(A^{\dot{q}_1}_{\alpha,i})_{(\alpha,i) \in \mathcal{D} \times 2} = (A^{\dot{q}_2}_{\alpha,i})_{(\alpha,i)}$, entonces $p \Vdash \dot{q}_1 = \dot{q}_2$.

Como κ es κ^{++}-supercompacto, ${}^{\kappa^{++}}M \subseteq M$, y en M están todas las sucesiones $(A_{\alpha,i})$ posibles, así que $\mathbb{P}^M_{\kappa+1} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$, pues sus elementos están determinados por tales sucesiones.

Por tanto, G es $\mathbb{P}^M_{\kappa+1}$-genérico sobre M.

Lema 31. *Sean M, N modelos internos (de ZFC), $M \subseteq N \models {}^\kappa M \subseteq M$. Si $\mathbb{P} \in M$ es una noción de forcing $(\kappa^+\text{-cc})^N$ y G es $\mathbb{P}$-genérico sobre N, $N[G] \models {}^\kappa M[G] \subseteq M[G]$.*

Dem: Basta ver que $({}^\kappa\mathrm{ORD} \subseteq M[G])^{N[G]}$, por elección. Como arriba, por la κ^+-cc de $\mathbb{P}$ todo $\mathbb{P}$-nombre τ en N para una κ-sucesión de ordinales corresponde a un $\mathbb{P}$-nombre así τ' en M. $\square_{(L31)}$

Se sigue que ${}^{\kappa^{++}}M[G] \subseteq M[G]$.

Sea $\mu = \kappa + 1$. En M, $P^M_{j(\mu)} \cong \mathbb{P}^M_\mu * \dot{\mathbb{P}}^M_{\mu,j(\mu)}$. El orden de $P^M_{\mu,j(\mu)}$ es definible en $M[G]$, y por tanto en $V[G]$.

Afirmación. *Sea $\mathbb{P}_\alpha$ una iteración de α pasos. Si κ es regular no contable, $\beta < \alpha$, $\mathbb{P}_\beta$ es κ-cc, $\forall \gamma \in [\beta, \alpha)$*

$$\Vdash_\gamma \dot{\mathbb{Q}}_\gamma \ \texttt{es}\ \kappa\texttt{-dirigido cerrado}$$

y $\mathbb{P}_\gamma$, para $\gamma \in (\beta, \alpha]$ límite, es el límite directo o inverso de $(\mathbb{P}_\delta)_{\delta<\gamma}$, siendo inverso cuando $\operatorname{cf}\gamma < \kappa$, entonces

$$\Vdash_\beta \dot{\mathbb{P}}_{\beta,\alpha} \ \texttt{es}\ \kappa\texttt{-dirigido cerrado.} \quad \square_{(Af)}$$

Éste es el detalle más técnico de toda la demostración, y omitimos su prueba.

Lema 32. *$\mathbb{P}^M_{\mu,j(\mu)}$ es κ^{+++}-dirigido cerrado en $V[G]$.*

Dem: Si $A \subseteq \mathbb{P}^M_{\mu,j(\mu)}$, todo subconjunto finito de A tiene cota inferior en A, y $|A| \leq \kappa^{++}$, entonces $A \in M[G]$, de modo que tiene una cota inferior pues en $M[G]$ $\mathbb{P}^M_{\mu,j(\mu)}$ es κ^{+++}-dirigido cerrado. $\square_{(L32)}$

Lema 33. *Si $A = \{\, q^\mu : \exists p \in G\,(q = j(p))\,\}$, todo subconjunto finito de A tiene una cota inferior en A.*

Dem: Sean $p_i \in G$ y $q_i = j(p_i)$ para $i < n$. Si $p \in G$ es extensión de los p_i y $q = j(p)$, por ser $\mathbb{P}_\kappa$ un límite directo, $\operatorname{supt} p \subseteq C \cup \{\kappa\}$ para algún C acotado en κ. Por elementaridad, $\operatorname{supt} q \subseteq j(C) \cup \{j(\kappa)\} = C \cup \{j(\kappa)\}$ y $p \restriction_\kappa = q \restriction_\kappa$.

Como $p \in M$, $p \cup q^\mu \in \mathbb{P}^M_{j(\mu)}$, y como $q(\kappa) = \mathbf{1}_\kappa$, $p \cup q^\mu \leq q \leq q_i$, así que $p \cup q^\mu \leq p \cup q^\mu_i$ $(i < n)$, y por definición del orden de $\mathbb{P}^M_{\mu,j(\mu)}$, $q^\mu \leq q^\mu_i$ $(i < n)$. $\square_{\text{(L33)}}$

Entonces, definiendo A como en el lema, A tiene una cota inferior $q_0 \in \mathbb{P}^M_{\mu,j(\mu)}$, por el Lema 32. Sea H $P^M_{\mu,j(\mu)}$-genérico sobre V[G] con $q_0 \in H$, y sean $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}[G]$, $M_1 = M[G][H]$. Por el Teorema 24, hay una extensión $j^* : \mathrm{V}_1 \xrightarrow{\prec} M_1$ de j. El problema es que j^* no necesariamente es definible en V_1, sino en $\mathrm{V}_1[H]$. Así, para mostrar que κ es medible en V_1 (que es donde vale $2^\kappa = \kappa^{++}$), vamos a exhibir una medida:

Como es usual, $\mathcal{U} = \{\, X \subseteq \kappa : x \in \mathrm{V}_1 \wedge \kappa \in j^*(X)\,\}$. Por el Lema 32, todo subconjunto de κ en $\mathrm{V}_1[H]$ está en V_1, así que $\mathcal{U}$ es una medida sobre κ en $\mathrm{V}_1[H]$. Pero $\Vdash_{\kappa+1} 2^\kappa = \kappa^{++}$, ya que $\Vdash_\kappa 2^\kappa = \kappa^+$ (por hipótesis) y $\Vdash_\kappa \dot{\mathbb{Q}}_\kappa = \mathtt{Add}(\kappa, \kappa^{++})$, así que $\mathrm{V}_1[H] \models |\mathcal{U}| \leq \kappa^{++}$, y de nuevo por el Lema 32, $\mathcal{U} \in \mathrm{V}_1$. Esto completa la prueba. $\square_{\text{(T32)}}$

b. Cambiando Cofinalidades.

En esta sección explicamos una técnica debida a Prikry que permite cambiar la cofinalidad de un medible a ω sin colapsar cardinales. Como se comentó en el capítulo 0 y se mostrará luego, cambiar la cofinalidad de un cardinal sin colapsarlos requiere suponer la consistencia de cardinales grandes más allá de los inaccesibles (y en realidad es necesario asumir que es consistente un medible). Usando condiciones definidas en términos del orden $\lhd$ introducido por Mitchell, Magidor [Ma4] (1978) y Gitik [Gi1] (1984) mostraron cómo cambiar la cofinalidad de ciertos cardinales grandes κ a cardinales $> \omega$, y Gitik dio aplicaciones de su método en las que $\operatorname{cf} \kappa$ de hecho no cambiaba. La técnica más usada para agregar sucesiones cofinales a cardinales grandes sin 'destruirlos' por esto es el forcing de Radin, que trataremos en el capítulo 4.

Def. 36. Sean κ un cardinal (qu asumiremos medible en el teorema) y F un filtro sobre κ que contiene a $[\alpha, \kappa)\, \forall \alpha < \kappa$. La noción de forcing de Prikry asociada a F es $\mathbb{P}_F = [\kappa]^{<\omega} \times F$ con el orden

$$(s, A) \leq (t, B) \iff t \text{ es segmento inicial de } s \text{ y } A \cup (s \setminus t) \subseteq B.$$

Se espera que $\mathbb{P}_F$ añada sucesiones cofinales de tamaño ω a κ, y las condiciones expresan restricciones en tales sucesiones: s sería un segmento inicial de la sucesión, y A indica de dónde pueden escogerse los elementos restantes. Esto explica la definición del orden.

Lema 34.

a) *Si $(s, A) \parallel (t, B)$ entonces s es segmento inicial de t, o viceversa.*
b) *$\mathbb{P}_F$ es κ^+-cc.*
c) *Si G es $\mathbb{P}_F$-genérico, $x^G = \bigcup \{\, s : \exists A\,((s, A) \in G)\,\}$ es un conjunto cofinal de κ con tipo de orden ω.*

Dem: Si $r \in [\kappa]^{<\omega}$ es tal que s y t son ambos segmentos iniciales de r, necesariamente uno de los 2 es segmento inicial del otro. Esto prueba a).

b) Sólo hay $\kappa^{<\omega} = \kappa$ posibilidades para la primera coordenada de una condición, y cualesquiera 2 condiciones con igual primera coordenada son compatibles.

c) x^G es no acotado (y por tanto su tipo de orden es por lo menos ω) pues $\mathcal{A}_\alpha = \{ (s, A) \in \mathbb{P}_F : \exists \beta \in s\, (\beta \geq \alpha) \}$ es denso en $\mathbb{P}_F$ para cada $\alpha < \kappa$, ya que dado $(s, A) \in \mathbb{P}_F$, $(s \cup \{\gamma\}, A) \in \mathcal{A}_\alpha$, donde $\gamma \in [\text{máx}\, s + \alpha + 1, \kappa) \cap A$, es una extensión. Por a), el tipo de orden de x^G tiene que ser ω. $\square_{(\text{L34})}$

Lema 35. *Si κ es medible, $\mathcal{U}$ es normal sobre κ, $(s, A) \in \mathbb{P}_{\mathcal{U}}$, y φ es una fórmula (con nombres como variables libres), hay un $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{U}$, t.q. (s, B) decide a φ (i.e., $(s, B) \Vdash \varphi$ o $(s, B) \Vdash \neg\varphi$).*

Dem: Consideremos

$$\begin{aligned} f : [A \setminus (\text{máx}(s)+1)]^{<\omega} &\longrightarrow 2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \exists X \in \mathcal{U}\, ((s \cup t, X) \Vdash \varphi) \\ 1 & \text{si no} \end{cases} . \end{aligned}$$

Por el Lema 12, de Rowbottom, hay un $B \subseteq A \setminus (\text{máx}(s)+1)$, $B \in \mathcal{U}$, homogéneo para f. Para este B, (s, B) decide φ:

Por contradicción, si no es así, hay extensiones (t_i, B_i), $i \in 2$, de (s, B) t.q. $(t_0, B_0) \Vdash \varphi$ y $(t_1, B_1) \Vdash \neg\varphi$. Escribamos $t_i = s \cup t^i$, con $t^i \in [B]^{<\omega}$. S.p.d.g., $|t^0| = |t^1|$, pero esto contradice que B sea homogéneo para f. $\square_{(\text{L35})}$

Teorema 33. *[Prikry] Si κ es medible y $\mathcal{U}$ es normal sobre κ, entonces, para cualquier G $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$-genérico, $V_\kappa = V_\kappa^{V[G]}$, los cardinales de V y $V[G]$ coinciden, y $\text{cf}^{V[G]}(\kappa) = \omega$.*

Dem: Sea $X \in V[G]$, $X \subseteq \lambda < \kappa$. Mostremos que $X \in V$: Sea $(s, A) \in G$ t.q. $(s, A) \Vdash \dot{X} \subset \check{\lambda}$, donde $\dot{X}$ es un nombre para X. Sea $(s', A') \leq (s, A)$. Por el lema, para cada $\alpha \in \lambda$ sea $(s', A'_\alpha) \leq (s', A')$ una condición que decide $\check{\alpha} \in \dot{X}$. Sean $A'' = \bigcap_{\alpha \in \lambda} A'_\alpha$ y $Y = \{ \alpha \in \lambda : (s', A'') \Vdash \check{\alpha} \in \dot{X} \}$. Entonces $(s', A'') \Vdash \dot{X} = \check{Y}$, y como $(s', A') \in \mathbb{P}_{\mathcal{U}} \restriction_{(s,A)}$ era arbitraria, $(s, A) \Vdash \dot{X} \in \check{V}$.

Módulo una biyección $\varphi_\alpha : V_{\omega+\alpha} \to \beth_\alpha$ (en V), como κ es inaccesible, esto implica que $V_\mu^{V[G]} = V_\mu$ para $\mu < \kappa$ y, como κ es límite, $V_\kappa^{V[G]} = V_\kappa$. Esto muestra que $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$ preserva todos los cardinales $< \kappa$. De nuevo por ser κ límite, $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$ preserva κ, y como $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$ es κ^+-cc por el Lema 34.b), preserva todos los cardinales ($> \kappa$).

Que $\text{cf}^{V[G]}(\kappa) = \omega$ es inmediato del Lema 34.c). $\square_{(\text{T33})}$

c. Con($\neg SCH$).

De los resultados anteriores es claro cómo cumplir nuestro objetivo:

Teorema 34. *[Prikry-Silver]* Con($\exists\kappa$ *κ^{++}-supercompacto*) $\longrightarrow$ Con($\neg SCH$)

Dem: Sea κ κ^{++}-supercompacto en V. Por *a.*, hay una extensión genérica $V[G]$ de V en la que κ es medible y $2^\kappa > \kappa^+$. Por *b.*, hay una extensión genérica $V[G][H]$ de $V[G]$ en la que κ es singular (de cofinalidad ω), no se introducen subconjuntos acotados de κ, y se preservan los cardinales. En esta extensión κ es aun límite fuerte (pues si $\rho < \kappa$, $(2^\rho)^{V[G][H]} = (2^\rho)^{V[G]} < \kappa$, porque κ es inaccesible en $V[G]$) y $\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} = 2^\kappa > \kappa^+$, obteniendo un modelo donde SCH falla. $\square_{(\mathrm{T34})}$

Para conseguir una falla en SCH no es necesario que nuestro contraejemplo sea límite fuerte:

Corolario 14. $\mathrm{Con}(\exists\kappa\ \kappa^{++}$*-supercompacto*$) \longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\kappa\, 2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa < \kappa^+ < \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} < 2^\kappa)$

Dem: Consideremos el modelo anterior, y por simplicidad llamémoslo V. Sean κ el contraejemplo que obtuvimos y $\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}(= 2^\kappa)$, y forcemos con $\mathbb{P} = \mathrm{Add}(\omega_1, \lambda^+)$. Si G es $\mathbb{P}$-genérico, $V[G] \models 2^{\mathrm{cf}\,\kappa} = 2^\omega = \omega_1 < \kappa < \kappa^+ < \lambda < \lambda^+ \leq 2^{\omega_1} \leq 2^\kappa$. Como $\mathrm{Add}(\omega_1, \lambda^+)$ es ω_1-cerrado, no agrega funciones de ω en V, y en particular $V[G] \models \lambda = \kappa^\omega = \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$. $\square_{(\mathrm{C14})}$

Por supuesto, para los resultados de esta sección sólo es necesario asumir

$$\mathrm{Con}(\exists\kappa \text{ medible}\,(2^\kappa > \kappa^+)).$$

Esta hipótesis (la existencia de un κ así) es mucho más débil que la existencia de un κ^{++}-supercompacto, y en los capítulos 3 y 4 veremos que es de hecho equiconsistente con $\neg$SCH.

5. $0^\sharp$ y el Lema de Cubrimiento.

El lema de cubrimiento es un resultado extraordinariamente importante por su impacto en el desarrollo de la teoría de conjuntos. Muestra que $\neg$SCH requiere de cardinales grandes, y establece una condición que determina si V y L son estructuras 'parecidas' o muy diferentes. Omitiremos varias de las demostraciones, y sólo presentaremos una idea de algunas otras.

a. Indiscernibles para L.

Def. 37. [Ehrenfeucht-Mostowski] Sea $\mathcal{M}$ una estructura. $\langle X, <\rangle$ es una familia de *indiscernibles* para $\mathcal{M}$ sii $X \subseteq M$ y para toda fórmula $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ en el lenguaje de $\mathcal{M}$, y cualesquiera tuplas $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$ de X $<$-isomorfas,

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[b_0, \ldots, b_n].$$

Éste es un concepto muy usado en teoría de modelos. De nuevo, hacemos referencia a [ChKe].

Los resultados de esta sección generalizan apropiadamente para core models mayores que L, y en el capítulo 3 explicaremos esta idea.

Def. 38. "$0^\sharp$ *(0 sostenido) existe*" denotará (por el momento) la afirmación

a) Si $\kappa < \lambda$ son cardinales no contables, $L_\kappa \prec L_\lambda$.

b) Hay una única clase S de ordinales que contiene todos los cardinales no contables y t.q. $\forall\kappa$ no contable

1) $S \cap \kappa$ tiene tipo de orden κ. Si κ es regular, $S \cap \kappa$ es club.
2) $S \cap \kappa$ es un conjunto de indiscernibles para $\langle L_\kappa, \in\rangle$.
3) Todo $a \in L_\kappa$ es L_κ-definible con parámetros de $S \cap \kappa$.

Los elementos de S se conocen como *Indiscernibles de Silver* para L.

Teorema 35. *[Kunen] Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\exists j : L \xrightarrow{\prec} L$.
2) $\exists\lambda$ *ordinal límite* ($\langle L_\lambda, \in\rangle$ *tiene un conjunto no contable de indiscernibles).*
3) $\exists\alpha, \beta$ *ordinales límite,* $\exists j : L_\alpha \xrightarrow{\prec} L_\beta$ $(\mathrm{crit}\, j < |\alpha|)$.
4) $0^\sharp$ *existe.*

En la introducción mencionamos que $0^\sharp$ era un subconjunto de ω. Mediante una gödelización de las fórmulas, esto se consigue (re)definiendo $0^\sharp$ de modo que podremos mostrar que, si existe,

$$0^\sharp = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \mathrm{L}_{\aleph_\omega} \models \varphi[\aleph_1, \ldots, \aleph_n]\}.$$

Acá, $\ulcorner\varphi\urcorner$ es el número de Gödel de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bajo alguna gödelización preestablecida) y, por supuesto, asumimos que el lenguaje ha sido formalizado en la teoría. Más adelante haremos explícita esta definición, y probaremos la 'equivalencia' de ambas.

Supongamos que $0^\sharp$ existe. Entonces $\mathrm{L}_\kappa \prec \mathrm{L}$ $\forall\kappa$ no contable (generalizando en la forma obvia el teorema de Tarski de que las extensiones elementales se preservan bajo uniones. Esto es un esquema, pero dentro de una frase veremos que puede escribirse formalmente), y podemos definir satisfacción para L:

Si $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ es una fórmula y $a_0, \ldots, a_n \in \mathrm{L}$,

$$\mathrm{L} \models \varphi(a_0, \ldots, a_n) \quad \text{sii} \quad \exists\kappa\,(\kappa \text{ es no contable, } \vec{a} \in \mathrm{L}_\kappa \text{ y } \mathrm{L}_\kappa \models \varphi(a_0, \ldots, a_n)),$$

y podríamos haber remplazado el $\exists$ por un $\forall$. En particular, si φ es una sentencia,

$$\mathrm{L} \models \varphi \longleftrightarrow \mathrm{L}_{\omega_1} \models \varphi.$$

[J1] trae una consecuencia interesante: Si $\kappa = \omega_1^{\mathrm{V}}$, $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \mathrm{L}_{\omega_1} \models \varphi\} \in \mathrm{def}(\mathrm{L}_\kappa) \subseteq \mathrm{L}$. Luego, por el teorema de Tarski sobre indefinibilidad de la verdad, ni ω_1 ni ningún otro cardinal no contable es definible en L (y, en particular, $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$), o tendríamos una definición de verdad en L.

Lema 36. *Suponga que* $0^\sharp$ *existe.*

1) *Todo conjunto construible definible en L es contable.*
2) *Todo cardinal no contable es Mahlo en L.*
3) *Sea* κ *un cardinal.* $|\mathcal{P}^{\mathrm{L}}(\kappa)| = \kappa$. *En particular, sólo* ω *reales son construibles.*

Dem: 1) Si $x \in \mathrm{L}$ es definible en L, sea φ una fórmula que lo defina: $\mathrm{L} \models \forall y\,(\varphi(y) \leftrightarrow y = x)$. Entonces $\mathrm{L} \models \exists! y\,\varphi(y)$, y $\mathrm{L}_{\omega_1} \prec \mathrm{L}$ es modelo de esta fórmula. Sea $x' \in \mathrm{L}_{\omega_1}$ un testigo. De nuevo, como $\mathrm{L}_{\omega_1} \prec \mathrm{L}$, $x = x'$.

Entonces todo conjunto de L definible en L está en L_{ω_1}, y por tanto es contable.

2) Si $\kappa = \omega_1$, $(\kappa \text{ es regular})^{\mathrm{L}}$. Si $\kappa = \aleph_\omega$, $(\kappa \text{ es límite})^{\mathrm{L}}$. Como todos los cardinales no contables son indiscernibles para L, si λ es no contable y, de hecho, si λ es un indiscernible de Silver, $(\lambda \text{ es inaccesible})^{\mathrm{L}}$. Sea S la clase de los indiscernibles de Silver. $S \cap \omega_1$ es club en ω_1, así que ω_1 es Mahlo en L. Como con la propiedad de reflexión de los medibles, esto muestra que si $\lambda \in S$, $(\lambda \text{ es } \lambda\text{-Mahlo})^{\mathrm{L}}$.

3) κ^+ es inaccesible en L. $\square_{(\mathrm{L36})}$

Se puede decir aun más, pues la existencia de $0^\sharp$ implica que los cardinales no contables poseen en L más propiedades de cardinales grandes (en especial, propiedades de tipo Ramsey), pero la existencia de medibles, e incluso de cardinales Ramsey, implica la de $0^\sharp$, y estas propiedades no se reflejan en L, lo que impone un límite.

Def. 39.

1) Un conjunto Σ de fórmulas es un *conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski* (E-M) sii $\exists\lambda$ ordinal límite $\exists\mathcal{M}\equiv \mathrm{L}_\lambda\,\exists I$ (I es un conjunto infinito de indiscernibles para $\mathcal{M}$ y Σ es el conjunto de fórmulas $\varphi(\vec{x})$ t.q. $\mathcal{M}\models\varphi(\vec{a})$ para alguna [o cualquier] sucesión $\vec{a}$ creciente *en el orden de* $\mathcal{M}$ —el orden de sus ordinales, los $x\in\mathcal{M}$ t.q. (x es ordinal)$^{\mathcal{M}}$— de elementos de I). En caso de que Σ sea como arriba para $\mathcal{M}$ e I, decimos $\Sigma=\Sigma(\mathcal{M},I)$.
2) Sea Σ E-M. Un (Σ,α)-*modelo*, donde α es un ordinal infinito, es un par $(\mathcal{M},I)$ t.q. $\Sigma=\Sigma(\mathcal{M},I)$, el tipo de orden de I es α y $\mathcal{M}$ es generado por I, es decir, $\mathcal{M}$ es la clausura de Skolem de I.

Lema 37. *Sean Σ E-M y $\omega\le\alpha\le\beta$.*

a) *Existe un (Σ,α)-modelo.*
b) *Si $(\mathcal{M}_\alpha,I_\alpha)$ es un (Σ,α)-modelo, $(\mathcal{M}_\beta,I_\beta)$ es un (Σ,β)-modelo y $h:I_\alpha\to I_\beta$ preserva el orden, hay una sumersión $\bar{h}:\mathcal{M}_\alpha\xrightarrow{\prec}\mathcal{M}_\beta$ que extiende a h. Si $\beta=\alpha$ y h es sobre, $\bar{h}$ es un isomorfismo de $\mathcal{M}_\alpha$ sobre $\mathcal{M}_\beta$. En particular, un (Σ,α)-modelo es único salvo isomorfismo.* $\square_{(\mathrm{L37})}$

Para una demostración, ver [D], cap. V. Los resultados que siguen son tomados de [D] y [J1].

Def. 40.

1) Sea Σ E-M. Un (Σ,α)-modelo $(\mathcal{M},I)$ es *notable* sii I es no acotado en los ordinales de $\mathcal{M}$ y, para $(i_\beta)_{\beta<\alpha}$ la enumeración creciente de I, todo ordinal de $\mathcal{M}$ menor que i_ω está en la clausura de Skolem de $\{\,i_n : n<\omega\,\}$.
2) Un conjunto E-M Σ es *no acotado* sii para todo término de Skolem $t(x_0,\ldots,x_n)$ Σ contiene la fórmula en $n+2$ variables

$$\text{Si } t(\vec{x}) \text{ es un ordinal, entonces } t(\vec{x})<x_{n+1}.$$

3) Σ es *notable* sii es no acotado y para todo término de Skolem $t(\vec{x},\vec{y})$, Σ contiene la fórmula

$$\text{Si } t(\vec{x},\vec{y}) \text{ es un ordinal } <y_0 \text{ entonces } t(\vec{x},\vec{y})=t(\vec{x},\vec{z}).$$

Lema 38. *Sea Σ E-M.*

a) *Σ es no acotado sii $\forall\alpha\ge\omega$ el (Σ,α)-modelo es no acotado sii $\exists\alpha\ge\omega$ t.q. el (Σ,α)-modelo es no acotado.*
b) *Σ es notable sii para todo (o algún) $\alpha>\omega$ el (Σ,α)-modelo es notable.* $\square_{(\mathrm{L38})}$

Def. 41. Sea Σ E-M. Σ es *bien fundamentado* sii todo (Σ,α)-modelo lo es.

Lema 39. *Σ es bien fundamentado sii para todo $\alpha \in [\omega,\omega_1)$ el (Σ,α)-modelo es bien fundamentado sii existe un $\alpha \geq \omega_1$ t.q. el (Σ,α)-modelo es bien fundamentado.* $\square_{(\text{L39})}$

Supongamos que $(\mathcal{M}, I)$ es un (Σ,α)-modelo bien fundamentado. Como $\mathcal{M} \equiv \mathrm{L}_\lambda$ para algún λ límite, su colapso transitivo es un L_α (por condensación, Lema 20.b)).

Lema 40. *Si Σ es bien fundamentado, hay un (Σ,κ)-modelo transitivo con universo L_κ $\forall\kappa$ no contable, (L_κ, I_κ). Si $\kappa < \lambda$, $I_\lambda \cap \kappa = I_\kappa$, y la clausura de Skolem de I_κ en L_λ es L_κ (por tanto, $L_\kappa \prec L_\lambda$).* $\square_{(\text{L40})}$

Para definir $0^\sharp$ requerimos de un lema más:

Lema 41. *Hay a lo más un conjunto E-M bien fundamentado y notable.*

Dem: Sea Σ como en la hipótesis, y definamos $S = \bigcup\{ I_\kappa : \kappa \text{ cardinal no contable}\}$, donde los I_κ son como arriba. No es difícil mostrar que S es como en la definición de $0^\sharp$ (de hecho $S \cap \kappa$ es club $\forall\kappa$ no contable), excepto tal vez por la unicidad. Como $\aleph_n \in S\,\forall n \geq 1$ y $\mathrm{L}_{\aleph_\omega}$ es el (universo del) $(\Sigma,\aleph_\omega)$-modelo transitivo, $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \in \Sigma$ sii

$$\mathrm{L}_{\aleph_\omega} \models \varphi[\aleph_1,\ldots,\aleph_n],$$

y Σ es único. $\square_{(\text{L41})}$

Def. 42. $0^\sharp$ es el conjunto de los números de Gödel de las fórmulas del único conjunto E-M bien fundamentado y notable, si existe.

Lema 42. *Las dos definiciones de $0^\sharp$ son equivalentes (es decir, de ZFC se deduce que las dos versiones dadas de "$0^\sharp$ existe" son equivalentes).*

Dem: La nueva definición implica la antigua, pues S (definido como arriba) es como en la otra definición, excepto tal vez por la unicidad. Basta mostrar, entonces, que hay a lo más un I club de indiscernibles para L_κ, donde κ es regular, t.q. L_κ es la clausura de Skolem de I.

Supongamos, entonces, que I, κ son así. Si $\Sigma = \Sigma(\mathrm{L}_\kappa, I)$, Σ es notable porque I es club, y como es no contable, no es difícil ver que es bien fundamentado ($S \cap I$ es infinito, así que $\Sigma = \Sigma(\mathrm{L}_\kappa, S\cap I) = \Sigma(\mathrm{L}_\kappa, S \cap \kappa)$). Entonces $0^\sharp$ es el conjunto de números de Gödel de las fórmulas en Σ, por unicidad, y como (L_κ, I) es el (Σ,κ)-modelo, $I = S \cap \kappa$.

Recíprocamente, si los $(\mathrm{L}_\kappa)_{\kappa \geq \aleph_1}$ son una cadena elemental, y existe una única clase S de indiscernibles de Silver (para L), $(\mathrm{L}_{\omega_1}, S \cap \aleph_1)$ es un modelo bien fundamentado y notable con ω_1 indiscernibles. $\square_{(\text{L42})}$

Observación. $0^\sharp$ no sólo es único (módulo la gödelización escogida). Puede mostrarse que es absoluto: Si $\mathcal{M}$ es un modelo interno, $\mathcal{M} \models 0^\sharp$ existe, sii $0^\sharp \in \mathcal{M}$ y $(0^\sharp)^{\mathcal{M}} = 0^\sharp$. Esto se debe a un importante teorema de Schoenfield y Levy que establece que los subconjuntos Π^2_1 de ω son absolutos (de hecho, las relaciones $\Pi^1_2(a)$, donde $a \in {}^\omega\omega \cap \mathcal{M}$), pues $0^\sharp$ tiene una definición Π^2_1 (ver [K] o [J1]).

Como corolario, forcing con conjuntos no puede 'crear' a $0^\sharp$, es decir:

- *Si $\mathbb{P} \in M$ es un poset, M un modelo interno de ZFC (o un modelo contable transitivo), G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y $M[G] \models 0^\sharp$ existe, entonces $M \models 0^\sharp$ existe.*

Dem: Como $\mathbb{P}$ no cambia los cardinales $\geq \left(|\mathbb{P}|^+\right)^M$, si $(\gamma_\alpha)_{\alpha\leq\omega}$ es una sucesión creciente de cardinales en M mayores que $\left(|\mathbb{P}|^+\right)^M$, $0^\sharp = \left\{ \ulcorner\varphi\urcorner : \mathrm{L}_{\gamma_\omega} \models \varphi[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] \right\} \in M$. $\square_{(\bullet)}$

Respecto a forcing con clases propias la situación no es del todo clara. Aaron Beller, en trabajo a comienzos de los 80 (ver [BelJeW] cáp. V), mostró que tampoco es posible crear por este medio a $0^\sharp$ para una amplia variedad de nociones:

$a \subseteq$ ORD es *genéricamente-sensible* sobre M, modelo interno, sii hay una clase $\mathbb{P}$ t.q. $\langle M, \mathbb{P}\rangle$ es sensible (ver luego del Lema 20), $\Vdash_{\mathbb{P}}$ restringido a fórmulas Σ_n (para cualquier n) es definible en $\langle M, \mathbb{P}\rangle$, y hay un G $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $a \in M[G]$.

Entonces $0^\sharp$ *no* es genéricamente-sensible sobre L. Además, el resultado principal de [BelJeW] es que, bajo condiciones razonables, hay una extensión del universo (por una clase propia $\mathbb{P}$) t.q. si G es $\mathbb{P}$-genérico,

$$\mathrm{V}[G] \models \mathrm{V} = \mathrm{L}[a]$$

para algún $a \in \mathcal{P}(\omega)^{\mathrm{V}[G]}$ (ver la sección *c* para la definición de $\mathrm{L}[a]$). Usando esto, resulta la afirmación sobre $0^\sharp$. Friedman [Fri2] extendió este resultado, pero en MK, trabajando con hiperclases (clases de clases).

El trabajo de Beller va más allá, explorando nuevas interpretaciones de la pregunta sobre la genericidad de $0^\sharp$. La motivación inicial fue una conjetura de Solovay: ¿Si $0^\sharp \notin \mathrm{L}[a]$, $a \subseteq \omega$, debe a ser genérico (i.e., pertenecer a una extensión genérica de L)? Un resultado muy interesante entre los obtenidos por Beller es que, si $0^\sharp$ no existe, hay un a que no es genérico (mediante un conjunto) para ningún 'modelo interno' propio $\mathrm{L}[b]$ de $\mathrm{L}[a]$. Esto está relacionado con nuestra inquietud respecto a la definibilidad de V en $\mathrm{V}[G]$ (ver antes de la definición 25).

Teorema 36. *[Jensen] Son equivalentes:*

a) *$0^\sharp$ no existe.*
b) *Si $X \subseteq ORD$ es no contable, $\exists Y \in L\,(X \subseteq Y \subseteq ORD \wedge |X| = |Y|)$.*

[Por un teorema de Prikry, no puede remplazarse "no contable" por "infinito"]

Este es el famoso 'lema de cubrimiento'. El Teorema 35 puede pensarse como si dijera que en cierto sentido, si $0^\sharp$ existe, V y L son muy distintos, mientras que el 36 puede pensarse diciendo que, si no existe, son muy parecidos.

Daremos en un momento una idea de las demostraciones. Por ahora, veamos algunas consecuencias del Teorema 36, que refuerzan la idea intuitiva del párrafo anterior.

Corolario 15. *Supongamos que no existe $0^\sharp$. Entonces*

a) *Si $\alpha \geq \omega_2$ es regular en L, $\mathrm{cf}\,\alpha = |\alpha|$.*
[Por un teorema de Bukovský, no se puede remplazar "$\alpha \geq \omega_2$" por "α no contable"]
b) *Si λ es singular, es singular en L, $\lambda^+ = (\lambda^+)^{\mathrm{L}}$ y, si hay un subconjunto de λ no construible, hay uno de μ no construible, para algún $\mu < \lambda$.*
c) *SCH (y, en particular, $\mathrm{Con}(\neg SCH)$ requiere la existencia de cardinales grandes).*

Dem: a) Sean α como en la hipótesis y $X \subseteq \alpha$ cofinal. Sea $Y \in \mathrm{L}$ con $X \subseteq Y \subseteq \alpha$, $|X| + \omega_1 = |Y|$. Como Y es cofinal en α, y α es regular en L, $|Y| = |\alpha| \geq \omega_2$. Entonces, de $|X| + \omega_1 = |Y|$ se sigue $|X| = |Y|$.

b) Sean λ singular y $\rho = (\lambda^+)^{\mathrm{L}}$. Si $\rho < \lambda^+$, $|\rho| = \lambda$ y $\mathrm{cf}\,\rho \leq \mathrm{cf}\,\lambda < \lambda$, lo que contradice a).

Así mismo, si λ es regular en L, $\mathrm{cf}\,\lambda = |\lambda| = \lambda$, una contradicción.

Finalmente, si $\forall \mu < \lambda\,(\mathcal{P}(\mu) \subseteq \mathrm{L})$ entonces $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq \mathrm{L}$. En efecto: Sean $X \subseteq \lambda$ y $\mu = \mathrm{cf}^{\mathrm{L}}(\lambda) < \lambda$. Sean $(\mu_\alpha)_{\alpha<\mu} \in \mathrm{L}$ cofinal en λ y $\varphi : \lambda \to \mathrm{L}_\lambda$ una biyección en L. Para cada $\alpha < \mu$ $\mu_\alpha \cap X \in \mathrm{L}$, por tanto $\mu_\alpha \cap X \in \mathrm{L}_\lambda$, y existe $\beta_\alpha \in \lambda$ t.q. $\varphi(\beta_\alpha) = \mu_\alpha \cap X$. Sea $Y = \{\beta_\alpha : \alpha < \mu\}$. Sea $Z \in \mathrm{L}$ con $Y \subseteq Z \subseteq \mu$ y $|Z| \leq |Y| + \omega_1 < \lambda$. Entonces $\rho = |Z|^{\mathrm{L}} < \lambda$, y hay una biyección $\psi : Z \to \rho$ en L. Como $\psi``Y \subseteq \rho < \lambda$, $\psi``Y \in \mathrm{L}$ y por tanto también $Y = \psi^{-1}``(\psi``Y)$. Como $X = \bigcup_{\beta \in Y} \varphi(\beta)$, tenemos lo querido.

c) Sea κ singular, y supongamos $2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa$. Queremos mostrar que $\left|[\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}\right| \leq \kappa^+$. Si $X \in [\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}$ hay un $Y = Y_X \in \mathrm{L}$ t.q. $|Y_X| = \omega_1 + \mathrm{cf}\,\kappa$ y $X \subseteq Y_X \subseteq \kappa$. Entonces

$$[\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa} \subseteq \bigcup \{\, [Y]^{\mathrm{cf}\,\kappa} : Y \in \left([\kappa]^{(\mathrm{cf}\,\kappa+\omega_1)^{\mathrm{V}}}\right)^{\mathrm{L}} \}.$$

Pero $\left|[Y]^{\mathrm{cf}\,\kappa}\right| = (\omega_1 + \mathrm{cf}\,\kappa)^{\mathrm{cf}\,\kappa} = 2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa$, para todo Y como arriba, así que

$$\left|[\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}\right| \leq \kappa \cdot (\kappa^+)^{\mathrm{L}} = \kappa^+$$

(por GCH, ver la introducción, y b). Sin usar b), por König esto nos brinda otra demostración de que $(\kappa^+)^{\mathrm{L}} = \kappa^+$ para κ singular, que no usa a)). $\square_{(\mathrm{C15})}$

El resto de la seción está dedicado a un bosquejo de la demostración del teorema 35.

Dem: (Teorema 35) 4) $\to$ 3) y 4) $\to$ 2) son triviales.

4) $\to$ 1) pues si S es la clase de indiscernibles de Silver para L, cualquier $\varphi : S \to S$ que preserve el orden puede extenderse a una sumersión $j : \mathrm{L} \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}$: A cada término de Skolem $t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con los α_i en S, envíeselo en $t(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n))$.

2) $\to$ 4) Puede mostrarse que si λ es como en la hipótesis y κ es no contable, existen α e $I \subseteq \alpha$ con tipo de orden κ t.q. (L_α, I) es notable.

1) $\to$ 2) Sea $j : \mathrm{L} \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}$, y definamos $\mathcal{D} = \{\, X \in \mathrm{L} : X \subseteq \mathrm{crit}\, j \wedge j(\mathrm{crit}\, j) \in j(X) \}$. Sea $\lambda = \mathrm{crit}\, j$. $\mathcal{D}$ *no* es un elemento de L (o L pensaría que λ es medible), pero (como antes) podemos usarlo para definir una ultrapotencia de L, formalizable en $\langle \mathrm{L}, \mathcal{D}\rangle$. Esta construcción, debida a Kunen, será central en el capítulo 3. A diferencia de la situación usual, $(\mathrm{L}^\lambda/\mathcal{D})^{\langle \mathrm{L},\mathcal{D}\rangle}$ en general no es bien fundamentado, aunque $\mathcal{D}$ sea L-λ-completo (la intersección de toda β-sucesión *en* L de elementos de $\mathcal{D}$ está en $\mathcal{D}$, $\forall \beta < \lambda$). Pero j factoriza como en el Teorema 16:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{L} & \\ {\scriptstyle j_{\mathcal{D}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle j} \\ (\mathrm{L}^\lambda/\mathcal{D})^{\langle \mathrm{L},\mathcal{D}\rangle} & \xrightarrow{k} & \mathrm{L} \end{array},$$

así que en este caso sí lo es, y podemos tomar su colapso transitivo, que es L (porque $\mathrm{L} \models \mathrm{V} = \mathrm{L}$).

Luego, s.p.d.g., podemos asumir que $j : \mathrm{L} \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}$ es generada por $\mathcal{D}$, de modo que $\operatorname{crit} j = \lambda$ y $j(\kappa) = \kappa$ $\forall\kappa$ cardinal límite de cofinalidad $> \lambda$.

Se definen las clases propias $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ por

$$\begin{aligned} U_\alpha &= \bigcap_{\beta<\alpha} U_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ es límite,} \\ U_{\alpha+1} &= \{\, \kappa \in U_\alpha : |U_\alpha \cap \kappa| = \kappa \,\} \quad \text{y} \\ U_0 &= \{\, \kappa : \kappa \text{ es cardinal límite, cf } \kappa > \gamma \,\}. \end{aligned}$$

Sea $\kappa \in U_{\omega_1}$. En $\langle \mathrm{L}_\kappa, \in \rangle$ hay una colección no contable de indiscernibles: Como $j(\kappa) = \kappa$, $j \restriction_{\mathrm{L}_\kappa} = i : \mathrm{L}_\kappa \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_\kappa$. Sean, para $\alpha < \omega_1$, $X_\alpha = U_\alpha \cap \kappa$ y M_α la clausura de Skolem (en L_κ) de $\lambda \cup X_\alpha$.

$M_\alpha \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_\kappa$. Por condensación y cardinalidad su colapso transitivo es L_κ. Sean $i_\alpha : \mathrm{L}_\kappa \to M_\alpha$ el inverso del colapso, y $\lambda_\alpha = i_\alpha(\lambda)$.

Entonces $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ es la familia buscada de indiscernibles.

3) $\to$ 2) Sea $j : \mathrm{L}_\alpha \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_\beta$ como en la hipótesis. Definiendo $\mathcal{D}$, λ y κ como antes, si $\mu = \kappa^+$ y $F = \{\, f \in \mathrm{L} : f : \lambda \to \mathrm{L}_\mu \,\}$, tomando la ultrapotencia de L_μ por $\mathcal{D}$, M $(= \{\, [f] : f \in F \,\})$, $\langle M, \in^M \rangle$ es bien fundamentado, y su colapso es L_μ. Esto nos da una sumersión $i : \mathrm{L}_\mu \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_\mu$ con $i \restriction_{\mathrm{L}_\kappa} : \mathrm{L}_\kappa \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_\kappa$ no trivial. Procediendo como antes tenemos lo querido. $\square_{(\mathrm{T35})}$

b. El Lema de Cubrimiento.

En esta sección damos un bosquejo de la prueba del lema de cubrimiento de Jensen, siguiendo [D], donde se usa una simplificación debida a Magidor de la prueba original en [DJe].

Dem: (Teorema 36) $\llcorner\!\leftarrow\!\urcorner$ Si $0^\sharp$ existe, $\aleph_\omega$ es inaccesible en L, así que $\{\, \aleph_n : n < \omega \,\}$ sólo puede ser cubierto por construibles de tamaño $\aleph_\omega$. Esto contradice b).

$\ulcorner\!\rightarrow\!\lrcorner$ Para las definiciones y resultados básicos de estructura fina referimos a la seción 6 del capítulo 0.

Para cada fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y $\alpha > 0$, la J_α-función de Skolem para φ es $h^\varphi_\alpha : {}^m J_\alpha \to J_\alpha$ dada por $h^\varphi_\alpha(\vec{y}) =\, <_\alpha$-mínimo $x \in J_\alpha$ t.q. $J_\alpha \models \varphi(x, \vec{y})$. Si tal x no existe, suponemos indefinida a $h^\varphi_\alpha(\vec{y})$ (o 0). Si $A \subseteq J_\alpha$, $H^n_\alpha(A)$ es la clausura Σ_n de A en J_α: Su clausura bajo todas las h^φ_α con φ Σ_n. Si $n > 0$, $A \subseteq H^n_\alpha(A) \prec_n J_\alpha$. Si $n = 0$, $A \subseteq H^n_\alpha(A) \prec_1 J_\alpha$. $\prec$, debido a la formalización del lenguaje, significa aquí, así como en la sección anterior, $\prec_n$ $\forall n \in \omega$.

Usaremos el siguiente resultado sin comentario:

Lema 43. *Si $\alpha > 0$, $0 < \beta \leq \omega$, $j : J_\alpha \xrightarrow{\prec}_n J_\beta$ y $\varphi(\vec{x})$ es Σ_n, entonces, si $\vec{a} \in J_\alpha$, $j(h^\varphi_\alpha(\vec{a})) = h^\varphi_\beta(j(\vec{a}))$.* $\square_{(\mathrm{L43})}$

Esto es claro. Cabe anotar que contempla el caso en que $h^\varphi_\alpha(\vec{a})$ no esté definida: Entonces $h^\varphi_\beta(j(\vec{a}))$ tampoco lo está (o ambos son 0).

Asumimos conocida la construcción de límites directos para sistemas dirigidos (ver, p.ej., [K] pg. 9, 10). Estos son únicos módulo isomorfismo. Es fácil ver que si

$$\langle (\mathcal{M}_i)_{i \in I}, (\pi_{ij})_{i \leq j} \rangle$$

es un tal sistema, con límite $\langle \mathcal{M}, (\pi_i)_{i \in I} \rangle$, y $\pi_{ij} : \mathcal{M}_i \xrightarrow{\prec}_n \mathcal{M}_j$, entonces $\pi_i : \mathcal{M}_i \xrightarrow{\prec}_n \mathcal{M}$.

Procedamos ahora por contradicción: Sea τ el mínimo ordinal t.q. existe un $X \subseteq \tau$, X no contable, y t.q. $X \subseteq Y \in \mathrm{L}$ implica $|X| < |Y|$. Fijemos un tal X.

Afirmación. *(τ es un cardinal)$^{\mathrm{L}}$, $|X| < \tau$ y si $Y \in L$ y $|Y|^{\mathrm{L}} < \tau$ entonces Y no cubre a X.*

Dem: Si $\mu < \tau$ y $\varphi : \mu \to \tau \in \mathrm{L}$ es sobre, sea $X_1 = \varphi^{-1}$"X. $|X_1| = |X| > \omega$ y X_1 está contenido en μ. Por minimalidad de τ, hay un $Y \in \mathrm{L}$ con $X_1 \subseteq Y_1 \subseteq \mu$ y $|X_1| = |Y_1|$. Entonces φ"Y_1 contradice que X sea un contraejemplo.

Análogamente, si $Y \in \mathrm{L}$, $|Y|^{\mathrm{L}} < \tau$ y $X \subseteq Y$, considerando una biyección $\psi : \rho \to Y \in \mathrm{L}$ con $\rho < \tau$ tenemos una contradicción.

$|X| < \tau$, obviamente, o $Y = \tau \in \mathrm{L}$ contradiría la elección de τ. $\Box_{(\mathrm{Af})}$

La estrategia de la demostración consiste en escoger, *cuidadosamente*, un $M \prec J_\tau$, $|M| = |X|$, $X \subseteq M$. Por el momento, tomemos un M así. Sea J_γ su colapso transitivo (condensación), y $\pi : M \xrightarrow{\sim} J_\gamma$ el isomorfismo asociado. Entonces $\pi^{-1} : J_\gamma \xrightarrow{\prec} J_\tau$, y como $|X| < \tau$ y X es cofinal en τ, $\gamma \neq \tau$ y π^{-1} es no trivial. Por el Teorema 35, si $\mathrm{crit}(\pi^{-1}) = \beta$ y $\beta < |\gamma|$, $0^\sharp$ existe y tenemos una contradicción.

Así, podemos suponer $\beta \geq |\gamma|$. Por la escogencia de M es posible hallar un $\delta \geq \gamma$ con $|\delta| > \beta$ y tal que hay una extensión π' de π^{-1}, $\pi' : J_\delta \xrightarrow{\prec} J_\nu$, de nuevo obteniendo una contradicción. M es tal que δ puede hallarse de modo que J_δ sea el límite directo de un sistema dirigido de estructuras en J_γ. Por π^{-1} este sistema permite definir otro en J_τ. Si su límite directo es bien fundamentado, su colapso resulta ser el J_ν de arriba, y π^{-1} puede extenderse a π' sin mayor dificultad.

Def. 43. Sea $\delta > \omega$ límite. Si $\eta \in [\omega, \omega\delta)$, $S^n_\delta(\eta)$ es el sistema Σ_1-elemental

$$\langle (J_{\rho(i)})_{i \in I}, (\sigma_{ij})_{i \leq j} \rangle$$

donde $I = I^\omega_\delta(\eta)$ es el conjunto de triplas (n, α, p) con $0 < n < \omega$, $\alpha < \eta$ y $p \in [J_\delta]^{<\omega}$, ordenado coordenada a coordenada (*puntualmente*), con $[J_\delta]^{<\omega}$ ordenado por contenencia.

El sistema se define como sigue: Sea $H^n_\delta(A)$ la clausura Σ_n en J_δ de $A \subseteq J_\delta$. Si $i = (n, \alpha, p) \in I$, entonces $H^n_\delta(\alpha \cup p) \prec_n J_\delta$, y por condensación hay un isomorfismo $\sigma_i^{-1} : H^n_\delta(\alpha \cup p) \xrightarrow{\sim} J_{\rho(i)}$.

Si $i \leq j$, $\sigma_{ij} = \sigma_j^{-1} \circ \sigma_i$. Entonces $\sigma_i : J_{\rho(i)} \xrightarrow{\prec}_n J_\delta$, y $\sigma_{ij} : J_{\rho(i)} \xrightarrow{\prec}_1 J_{\rho(j)}$.

$S^n_\delta(\eta)$ se define análogamente, sólo que ahora n está fijo. $S^n_\delta(\eta)$ es Σ_n-elemental.

Lema 44. *Sea n con $0 < n \leq \omega$. El límite directo de $S^n_\delta(\eta)$ es J_δ. Sea $\mathcal{M} = \langle \langle N, E \rangle, (\theta_i)_i \rangle$ el límite del sistema*

$$\langle (J_{\pi^{-1} \circ \rho(i)})_i, (\pi^{-1} \circ \sigma_{ij})_{i \leq j} \rangle.$$

Entonces hay una sumersión

$$\pi' : J_\delta \xrightarrow{\prec}_{1+n} \langle N, E\rangle.$$

Si $\langle N, E\rangle$ *es bien fundamentado, s.p.d.g.* $\langle N, E\rangle = \langle J_\nu, \in\rangle$ *para algún* ν, *y en ese caso* $\pi' \restriction_\eta = \pi^{-1} \restriction_\eta$.

Dem: Es rutinario verificar que J_δ es el límite de $S^n_\delta(\eta)$. Si $x \in J_\delta$, $x = \sigma_i(x')$ para algún $i \in I^n_\delta(\eta)$ y algún $x' \in J_{\rho(i)}$. Si $y' = \pi^{-1}(x')$ y $\pi'(x) = \theta_i(y')$, π' está bien definido (no depende de i) y, si $n < \omega$, es Σ_n-elemental.

Para mostrar que es Σ_{n+1}-elemental, tomemos φ Π_n t.q. $\langle N, E\rangle \models \exists y\, \varphi(y, \pi'(x))$ y sea $y'' \in \mathcal{U}$ un testigo. S.p.d.g. $y'' = \theta_i(z)$. Como θ_i es Σ_n-elemental, $J_{\pi^{-1}\circ\rho(i)} \models \varphi(z, y')$. Pero $y' = \pi^{-1} \circ \sigma_i^{-1}(x)$, y como $\pi^{-1} : J_\gamma \xrightarrow{\prec} J_\tau$,

$$J_{\rho(i)} \models \exists y \varphi(y, \sigma_i^{-1}(x)).$$

Si z' es un testigo, como $\sigma_i : J_{\rho(i)} \xrightarrow{\prec}_n J_\delta$,

$$J_\delta \models \varphi(\sigma_i(z'), x) \quad \text{o}$$
$$J\delta \models \exists y\, \varphi(y, x).$$

En la otra dirección es análogo.

Si $n = \omega > k$, tomando i suficientemente grande en el argumento de arriba, π' resulta Σ_k-elemental.

Supongamos ahora que $\langle N, E\rangle$ es bien fundamentado. Entonces, s.p.d.g., N es transitivo y $E = \in\restriction_{M^2}$. Sea ν t.q. $N \cap ORD = \omega\nu$. ν existe porque δ es límite. Debemos mostrar que $N = J_\nu$: En la notación del Lema 18, si $x \in M$ e $i \in I$ son tales que $x = \theta_i(x')$, $x' \in J_{\pi^{-1}\circ\rho(i)}$, hay un $\mu < \pi^{-1} \circ \rho(i)$ y un $m < \omega$ t.q. $x' \in J_{\mu,m}$ y $x = \theta_i(x') \in \theta_i(J_{\mu,m}) = J_{\theta_i(\mu),m} \subseteq \bigcup_{\xi<\nu,k<\omega} J_{\xi,k} = J_\nu$ (pues $\theta_i \circ \pi^{-1} = \pi' \circ \sigma_i$).

Recíprocamente, si $x \in J_\nu$, $x \in J_{\mu,m}$ para algún $\mu < \nu$, $m < \omega$, y $\omega\mu \in N$. Entonces $\mu = \theta_i(\mu')$ para algún i y algún $\mu' < \pi^{-1} \circ \rho(i)$. $\theta_i(J_{\mu',m}) = J_{\theta_i(\mu'),m} = J_{\mu,m}$. Luego, $x \in \operatorname{Ran}\theta_i \subseteq N$, porque N es transitivo.

Por último, supongamos entonces que $N = J_\nu$.

Si $\xi < \eta$, $i \in I^n_\delta(\eta)$ es tal que $\xi \in \alpha$ donde $\alpha < \eta$ es la segunda coordenada de i, $\sigma_{ij}(\xi) = \xi \,\forall j \geq i$, de modo que $\sigma_i(\xi) = \xi$ y $\big(\pi^{-1}(\sigma_{ij})\big)\big(\pi^{-1}(\xi)\big) = \pi^{-1}(\xi)$. Entonces $\pi'(\xi) = \theta_i\big(\pi^{-1}(\xi)\big) = \pi^{-1}(\xi)$. $\square_{(\text{L44})}$

La demostración se completa mostrando que el M que buscamos se puede escoger, de modo que si $\delta \geq \gamma$, $S^\omega_\delta(\gamma)$ es tal que $\rho(i) < \gamma \,\forall i \in I$, y el límite del sistema asociado por π^{-1} es bien fundamentado.

Probar este hecho es muy complicado, y no lo haremos acá. Hace uso de más resultados en teoría fina de los mostrados en este trabajo. La idea es ver que se puede tomar M de modo que si $\rho(i) < \gamma \,\forall i \in I^\omega_\delta(\gamma) \,\forall \delta \geq \gamma$ (δ límite) entonces $\langle N, E\rangle$, como en el lema, es bien fundamentado; y luego verificar que la condición en $\rho(i)$ y γ se cumple. Esto último es técnico pero más bien directo.

La primera parte usa repetidas veces el Lema 44. Básicamente, consiste en construir una ω_1-cadena elemental continua $(M_\alpha)_\alpha$ de subestructuras elementales, con $M_0 = H^\omega_\tau(X)$ y límite J_τ. La cadena se toma de modo que una falla de la buena fundamentación implicaría una falla en la construcción. Lo difícil de la prueba, por contradicción, es mostrar esto. Deben definirse varios sistemas dirigidos relacionados mediante sumersiones unos con otros. Hay al menos 5 tipos distintos de sumersiones involucrados. El argumento depende de un parámetro $n \leq \omega$, y los casos $n = 0$ y $n = \omega$ deben tratarse aparte, aunque las modificaciones son pequeñas (para $n = 0$ debe definirse otro sistema dirigido, similar a los mostrados).

La demostración original también dividía en 2 casos el argumento, pero ahora según $\operatorname{cf}\tau = \omega$ o mayor. Aproximadamente la idea es la misma, sólo que si $\operatorname{cf}\tau > \omega$, no se trabaja con $\pi' : J_\delta \xrightarrow{\prec} J_\nu$, sino con $\pi' : \mathrm{L} \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}$. $\square_{\text{(T36)}}$

El bosquejo presentado es *muy* rápido. Pero, como ya hemos mencionado, el resultado es muy importante, tanto que no podíamos pasarlo por alto. Y, como en varias ocasiones a partir de ahora, la inclusión de detalles haría que este trabajo se prolongara por otras ω páginas. En el capítulo 4 veremos generalizaciones y resultados similares.

c. Construibilidad Relativa.

La construcción de la jerarquía $(J_\alpha)_\alpha$, o de la original de Gödel, $(L_\alpha)_\alpha$, puede generalizarse con facilidad. Consideramos ahora estructuras en el lenguaje $\mathcal{L}_{\langle A\rangle}$ que, además del símbolo $\in$ tiene otro $\mathtt{A}$ para representar una relación.

Def. 44. Sea A una clase (no necesariamente propia).

1. Si x es un conjunto, $\operatorname{def}^A(x)$ denota la colección de subconjuntos de x definibles sobre $\langle x, \in, A\cap x\rangle$ en el lenguaje $\mathcal{L}_{\langle A\rangle}$.
2. $(L_\alpha[A])_\alpha$ es la jerarquía de los construibles *relativa* a A; ahora
$$\mathrm{L}_{\alpha+1}[A] = \operatorname{def}^A(\mathrm{L}_\alpha[A]).$$
Como antes, $\mathrm{L}_0[A] = \emptyset$, $\mathrm{L}_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{L}_\alpha[A]$ si λ es límite, y $\mathrm{L}[A] = \bigcup_\alpha \mathrm{L}_\alpha[A]$.
3. Si x es un conjunto, $\operatorname{rud}^A(x)$ es la clausura de $x \cup \{x\}$ bajo funciones rudimentarias, y las funciones
$$f(\vec{x}) = x_i \cap A \quad (i < n).$$
4. $J_\alpha[A] = \operatorname{rud}^A(J_\alpha[A])$. El resto de la definición continua como antes. Al hablar de $J_\alpha[A]$, la pensaremos como la estructura asociada, $\langle J_\alpha[A], \in, A\cap J_\alpha[A]\rangle$. De nuevo, $\mathrm{L}[A] = \bigcup_\alpha J_\alpha[A]$.

Nótese que no necesariamente $A \in \mathrm{L}[A]$. $\mathrm{L}[A]$ es un modelo interno de ZFC. De hecho, hay un buen orden Σ_1 definible en cada $J_\alpha[A]$ con parámetros, los $\mathrm{L}\alpha[A]$ y los $J_\alpha[A]$ forman una sucesión continua y creciente, son transitivos, $|\mathrm{L}_\alpha[A]| = |\alpha|$ si $\alpha \geq \omega$, si $A \cap \mathrm{L}[A] = B \cap \mathrm{L}[B]$ entonces $\mathrm{L}[A] = \mathrm{L}[B]$, y $\mathrm{L}[A] = \mathrm{L}\big[A \cap \mathrm{L}[A]\big]$. Cada $\mathrm{L}_\alpha[A]$, $J_\alpha[A]$ es sensible. $\mathrm{L}[A]$ es modelo de $\mathrm{V} = \mathrm{L}[B]$ $(B = A \cap \mathrm{L}[A])$.

Condensación vale: Si $\alpha > \omega$ es límite, $X \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_\alpha[A]$, existe $\pi : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}_\beta[B]$ donde $B = \pi``(A \cap X)$ y β es algún elemento de α. β y π son únicos. Igualmente, si $\alpha > 1$, $X \xrightarrow{\prec} J_\alpha[A]$ implica $X \cong J_\beta[B]$ con β, B como antes.

En L$[A]$ no necesariamente vale GCH. Si $A \subseteq \kappa$, $2^\lambda = \lambda^+ \, \forall \lambda \geq \kappa$ en L$[A]$. Además, hay funciones Σ_n de Skolem para cada $J_\alpha[A]$, lo que permite reproducir bastante bien en L$[A]$ la teoría de estructura fina de L.

c.α. Sostenidos.

En teoría de conjuntos es usual identificar los reales con $\mathcal{P}(\omega)$, $[\omega]^\omega$ o ${}^\omega\omega$. Puede desarrollarse la teoría de E-M conjuntos para a en analogía con lo hecho en la sección a, para a un real, haciendo ahora referencia a la teoría de una estructura de la forma $\langle \mathrm{L}_\delta[a], \in, (x_n)_{n \leq \omega}, a, (\xi)_{\xi \leq \alpha} \rangle$, $\delta > \alpha$ límite, donde los x_n son ordinales crecientes, indiscernibles para la estructura $\langle \mathrm{L}_\delta[a], \in, a, \xi \rangle_{\xi \leq \alpha}$, y con esta teoría puede definirse el correspondiente conjunto $a^\sharp$. Estos *sostenidos* están intrínsecamente relacionados unos con otros: Si I_a es la clase de indiscernibles para L$[a]$, y a y b son reales, $a \in$ L$[b]$ y $b^\sharp$ existe, entonces $a^\sharp$ existe e $I_b \subseteq I_a$.

En teoría descriptiva, y bajo la hipótesis de determinancia (en V), la clase $I^* = \bigcap_{a \in {}^\omega\omega} I_a$ de *indiscernibles uniformes*, asumiendo que $\forall a \in {}^\omega\omega \, (a^\sharp$ existe), es muy significativa, aunque aquí no profundizaremos en esto.

En completa analogía, cada vez que se habla de un sostenido para un modelo M, se hace referencia a una clase de indiscernibles para M.

Capítulo 2

Posibles CoFinalidades

> **Can we get any result when cf $\kappa = \aleph_0$?**
> **(...)**
> **We know nothing at present. The expected result is that assuming the consistency of large cardinals, $\aleph_\omega$ may be strong limit, and $2^{\aleph_\omega}$ can be any $\aleph_\alpha$, cf $\aleph_\alpha > \aleph_\omega$.**
>
> (Saharon Shelah, [Sh2], 56.)

La cita se incluye aquí por el contraste que refleja: El mismo Shelah, apenas 2 años después de [Sh2], publicó un resultado donde hallaba cotas para la exponencial de cardinales de cofinalidad ω. En este capítulo presentaremos la teoría que le permitió llegar a tales cotas, e ideas de las demostraciones correspondientes. Sería injusto no aclarar que [Sh2], luego de la cita, comenta que, de todos modos, es interesante notar que, si cf $\alpha = \aleph_0$, $\alpha = \bigcup_n \alpha_n$, $(\alpha_n)_n$ creciente, entonces cf$(\prod_n \langle \aleph_{\alpha_n}, < \rangle / \mathcal{D})$, donde $\mathcal{D}$ es no principal en ω, es menor que $(2^{|\alpha|})^+$. Esta idea, más desarrollada, y el énfasis en las cofinalidades de los ultraproductos de cardinales, vistos como conjuntos ordenados, es justo el tipo de resultados que pueden hallarse con tal teoría.

1. Fundamentos.

Como mencionamos en la introducción, la teoría de pcf surgió primero como una serie de resultados más o menos aislados obtenidos por Shelah de su trabajo con álgebras de Jónsson, y luego, como una teoría sistemática gracias al establecimiento en [Sh3] de cotas para la exponencial, que hacían parte de sus investigaciones en el lema de cubrimiento.

[Sh7] y [J2] son buenas motivaciones para su estudio, y [BuMa] y [Sh8] proveen los detalles. Aunque usaremos [BuMa] en nuestra exposición, seguiremos la notación de Shelah donde sea posible.

Si $\mathfrak{a}$ es un conjunto (no vacío) de cardinales, $\prod \mathfrak{a}$ significará $\prod_{\kappa \in \mathfrak{a}} \langle \kappa, < \rangle$. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$, $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{U}$ es linealmente ordenado.

Def. 45. Sea $\mathfrak{a}$ un conjunto (no vacío) de cardinales.

1. λ es una *posible cofinalidad* de $\prod \mathfrak{a}$ sii existe un ultrafiltro (no necesariamente no principal) $\mathcal{U}$ sobre $\mathfrak{a}$ t.q. $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{U}$ tiene cofinalidad[2] λ. pcf$(\mathfrak{a})$ es el conjunto de todas las *p*osibles *cof*inalidades de $\mathfrak{a}$.
2. $J_{<\lambda}(\mathfrak{a}) = \{\, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} :$ para todo ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre $\mathfrak{a}$ que contenga a $\mathfrak{b}$, cf$(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda \,\}$. Omitiremos la mención a $\mathfrak{a}$ si es claro del contexto. Si $f, g \in \prod \mathfrak{a}$, $f <_{J_{<\lambda}} g$ sii $\{\, \alpha : f(\alpha) \geq g(\alpha) \,\} \in J_{<\lambda}$, etc.

---

[2] Explícitamente, cf$(I, <)$ es el mínimo μ t.q. hay una familia $(f_\alpha)_{\alpha<\mu}$ de elementos de I t.q. $\forall g \in I\, \exists \alpha \in \mu\, (g \leq f_\alpha)$. Esto *no* significa que haya una tal familia con tipo de orden μ (en nuestro caso, sí). El ejemplo usual es $(\omega, <) \times (\omega_1, <) = \mathcal{M}$. cf$(\mathcal{M}) = \omega_1$, pero por supuesto no hay ω_1-sucesiones cofinales en $\omega \times \omega_1$ no decrecientes puntualmente.

3. $(I, <)$ es λ-dirigido sii $A \subseteq I$ y $|A| < \lambda$ implican que hay una cota superior (en el sentido de $<$) para A. Así, dirigido es ω-dirigido.
4. Si I es un ideal sobre $\mathfrak{a}$ y $\prod \mathfrak{a}/I$ tiene una λ-sucesión creciente y cofinal, diremos que la cofinalidad de $\prod \mathfrak{a}/I$ es *verdadera*, y lo notaremos por $\operatorname{tcf}(\prod \mathfrak{a}/I) = \lambda$.

Supondremos a partir de ahora que $\mathfrak{a}$ es infinito y que los cardinales en $\mathfrak{a}$ son regulares. Para los resultados que siguen, suele ser suficiente tomar $\min \mathfrak{a} > 2^{|\mathfrak{a}|}$. A menos que se explicite lo contrario, *nosotros supondremos* $|\mathfrak{a}|^+ < \min \mathfrak{a}$. $|\mathfrak{a}| < \min \mathfrak{a}$ sería suficiente, pero al trabajar con ultrafiltros no principales esto no representa diferencia.

• $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$, $\min \operatorname{pcf} \mathfrak{a} = \min \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \Rightarrow \operatorname{pcf}(\mathfrak{a}_1) \subseteq \operatorname{pcf}(\mathfrak{a}_2)$, $\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2) = \operatorname{pcf}(\mathfrak{a}_1) \cup \operatorname{pcf}(\mathfrak{a}_2)$.

Dem: Para ver que $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$, basta considerar los ultrafiltros principales [que Shelah, quizás con razón, llama *no* principales]. Por tanto, $\min \mathfrak{a} \geq \min \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$. Nótese que $\prod \mathfrak{a}$ es $(\min \mathfrak{a})$-dirigido, pues los elementos de $\mathfrak{a}$ son regulares, así que para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathfrak{a}$, $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{U}$ es $(\min \mathfrak{a})$-dirigido, y su cofinalidad es $\geq \min \mathfrak{a}$.

También es fácil ver que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \longrightarrow \operatorname{pcf} \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{pcf} \mathfrak{b}$. En efecto, si $\lambda \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$, y $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{U}$ es un testigo, $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{b}/\mathcal{U}') = \lambda$, donde $\mathcal{U}'$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{b}$ que extiende a $\mathcal{U}$. De la misma forma, $\operatorname{pcf}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \operatorname{pcf}(\mathfrak{a}) \cup \operatorname{pcf}(\mathfrak{b})$: $\supseteq$ es por lo anterior. Para la otra contenencia, recuérdese que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$, uno de estos dos conjuntos debe estar en $\mathcal{U}$, digamos $\mathfrak{a}$. En tal caso, $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$, y $\operatorname{cf}(\prod(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})/\mathcal{U}) = \operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{U}')$. $\square_{(\bullet)}$

Teorema 37. *Sea $\mathfrak{a} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$, $|\mathfrak{a}|^+ < \lambda_i \forall i \in I$, los λ_i (distintos y) regulares. Entonces*

a) $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| \leq 2^{|\mathfrak{a}|}$.
b) *Si* $\min \mathfrak{a} > |\operatorname{pcf} \mathfrak{a}|$, $\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}) = \operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}))$.
c) $\operatorname{pcf} \mathfrak{a}$ *tiene un elemento maximal,* $\max \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$.
d) $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}) = \max \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$.
e) *Si $\mathfrak{a}$ no tiene último elemento,* $\operatorname{Sup} \mathfrak{a} < \max \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$.
f) $\forall \lambda \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a} \exists \mathfrak{b}_\lambda \subseteq \mathfrak{a}$ *t.q.* $\lambda = \max \operatorname{pcf} \mathfrak{b}_\lambda \notin \operatorname{pcf}(\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}_\lambda)$.
g) $J_{<\lambda}$ *es un ideal. De hecho, es el ideal sobre $\mathfrak{a}$ generado por los $\mathfrak{b}_\mu$ para $\mu < \lambda$.*
h) $\forall \lambda \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$ *existe una sucesión* $(f^\lambda_\mu)_{\mu<\lambda}$ $<_{J_{<\lambda}}$*-creciente de funciones t.q.* $\forall f \in \prod \mathfrak{a} \exists \mu < \lambda$ *t.q.* $f < f^\lambda_\mu$ *módulo el ideal generado por $J_{<\lambda}$ y $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}_\lambda$.*
i) $\operatorname{tcf}(\prod \mathfrak{b}_\lambda / J_{<\lambda}) = \lambda$.

Dem: b) $\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}))$ por •. Para la otra dirección, sea $\lambda \in \operatorname{pcf}(\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}))$, como atestigua el ultrafiltro $\mathcal{D}$. Si $\rho \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$, sea $\mathcal{D}_\rho$ un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ que lo atestigüe, y definamos $\mathcal{D}^*$ de modo que 'promedie' los $\mathcal{D}_\rho$:

$$\mathcal{D}^* = \{ A \subset \mathfrak{a} : \{ \rho \in \operatorname{pcf} \alpha : A \in \mathcal{D}_\rho \} \in \mathcal{D} \}.$$

Es fácil ver $\mathcal{D}^*$ es un ultrafiltro. Para $\rho \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$ sea $(f^\rho_\mu)_{\mu<\rho}$ $<_{\mathcal{D}}$-creciente y $<_{\mathcal{D}}$-cofinal en $\prod \mathfrak{a}$ (de modo que sus clases de equivalencia $f/\mathcal{D}$ son cofinales en $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}_\rho$. Para simplificar la notación, usualmente confundiremos las funciones con sus clases). Sea $(g_\mu)_{\mu<\lambda}$ creciente y cofinal en $\prod(\operatorname{pcf} \mathfrak{a})/\mathcal{D}$. Defínase $(h_\mu)_{\mu<\lambda} \in {}^\lambda \prod \mathfrak{a}$ por $h_\mu(\alpha) = \operatorname{Sup}_{\rho \in \operatorname{pcf} \alpha} f^\rho_{g_\mu(\rho)}(\alpha)$.

h_μ está bien definida por regularidad de los elementos de $\mathfrak{a}$, pues $|\operatorname{pcf}\mathfrak{a}| < \min\mathfrak{a}$ por hipótesis. Para concluir la prueba nos basta mostrar que hay una subsucesión de $(h_\mu)_\mu$ creciente y cofinal en $\prod\mathfrak{a}/\mathcal{D}^*$.

Sea $h \in \prod\mathfrak{a}$. Mostremos que $\exists\mu_1 < \lambda$ t.q. $h \leq_{\mathcal{D}^*} h_\mu\, \forall\mu \geq \mu_1$, con lo que la subsucesión se encuentra facilmente. Si $\rho \in \operatorname{pcf}(\mathfrak{a})$, sea μ_ρ t.q. $h \leq_{\mathcal{D}_\rho} f^\rho_{\mu_\rho}$. Sea μ_1 t.q. $(\mu_\rho)_{\rho\in\operatorname{pcf}\mathfrak{a}} \leq_{\mathcal{D}} g_{\mu_1}$. μ_1 es como se quiere pues $A_\mu = \{\,\alpha \in \mathfrak{a} : h(\alpha) \leq h_\mu(\alpha)\,\} \in \mathcal{D}^*\, \forall\mu \geq \mu_1$.

En efecto, si $\mu \geq \mu_1$, $B_\mu = \{\,\rho \in \operatorname{pcf}\mathfrak{a} : \mu_\rho \leq g_\mu(\rho)\,\} \in \mathcal{D}$, y tomemos $\rho \in B_\mu$. $A^\rho = \{\,\alpha \in \mathfrak{a} : h(\alpha) \leq f^\rho_{\mu_\rho}(\alpha) \leq f^\rho_{g_\mu(\rho)}(\alpha) \leq h_\mu(\alpha)\,\} \in \mathcal{D}_\rho$, por definición de B_μ, así que $A_\mu \in \mathcal{D}_\rho$, y por tanto $A_\mu \in \mathcal{D}^*$, por definición. Esto prueba b).

Shelah muestra esto en un contexto más general, que no requiere que los filtros involucrados sean ultrafiltros, pero su demostración es la misma.

Lema 45. *$\prod\mathfrak{a}/J_{<\lambda}$ es λ-dirigido.*

Dem: Comencemos mostrando que $J_{<\lambda}$ es un ideal, de modo que la afirmación tiene sentido. Esto es fácil; por ejemplo $J_{<\lambda}$ es no vacío, pues $\emptyset \in J_{<\lambda}$ y, si $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$ y $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{c} \in \mathcal{D}$, entonces $\mathfrak{b} \in \mathcal{D}$ y $\operatorname{cf}(\prod\mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda$.

Procedamos con la demostración del lema: Sea $F \subseteq \prod\mathfrak{a}/J_{<\lambda}$, $|F| < \lambda$. Por inducción en $|F|$ mostremos que hay una $g \in \prod\mathfrak{a}/J_{<\lambda}$ mayor que todos los elementos de F.

Si $|F| < \min\mathfrak{a}$ esto es claro (basta tomar supremos puntualmente). Así, podemos asumir que $(|\mathfrak{a}|^+ <) \min\mathfrak{a} \leq \mu = |F| < \lambda$. Por hipótesis de inducción, podemos suponer F linealmente ordenado, digamos $F = \{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ con $\alpha < \beta < \mu \to f_\alpha < f_\beta$, y μ regular: Si fuese singular, escribiendo

$$F = \bigcup_{\delta<\operatorname{cf}\mu} F_\delta, \quad \text{con cada } |F_\delta| < \mu,$$

podemos escoger (para $\delta < \operatorname{cf}\mu$) un g_δ que acote a F_δ, y luego un g que acote a $\{g_\delta\}_\delta$. Entonces g acota a F.

Tratemos de definir, por inducción en $\alpha < |\mathfrak{a}|^+$, $g_\alpha \in \prod\mathfrak{a}/J_{<\lambda}$, i_α y $(c^\alpha_\beta)_{\beta<\mu}$, t.q.

1) $\forall\beta < \alpha\, (g_\beta \leq g_\alpha)$.
2) Si $\beta < \mu$, $c^\alpha_\beta = \{\,\rho \in \mathfrak{a} : f_\beta(\rho) > g_\alpha(\rho)\,\}$.
3) $\forall\alpha < |\mathfrak{a}|^+\, \forall\beta \in [i_{\alpha+1}, \mu)\, (c^\alpha_\beta \neq c^{\alpha+1}_\beta)$.

Esto no es posible, pues por regularidad de μ $i = \operatorname{Sup}_\alpha i_\alpha < \mu$, y como $c^\alpha_i \neq c^{\alpha+1}_i\, \forall\alpha$, los c^α_i son subconjuntos de $\mathfrak{a}$, y $\alpha < \beta \longrightarrow c^\beta_i \subseteq c^\alpha_i$, $\mathfrak{a}$ tendría al menos $|\mathfrak{a}|^+$ elementos, una contradicción.

Pero, si F no fuese acotado, la definición sería posible, así que tenemos lo querido. Sean $g_0 = f_0$, $i_0 = 0$. Si α es límite, g_α es la función

$$\rho \longmapsto \operatorname*{Sup}_{\beta<\alpha} g_\beta(\rho),$$

y de nuevo $i_\alpha = 0$.

Si $\alpha = \beta + 1$ y g_β, $(c^\beta_\gamma)_\beta$ e i_β ya están definidos, hay 2 posibilidades: o $c^\beta_\gamma \in J_{<\lambda}$ para una cantidad no acotada de $\gamma < \mu$, en cuyo caso g_β es cota para F, o hay un $i_\alpha < \mu$ mínimo t.q. $c^\beta_{i_\alpha} \notin J_{<\lambda}$. Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ testigo de esto: $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) \geq \lambda$ y $c^\beta_{i_\alpha} \in \mathcal{D}$. Entonces $(f_\delta/\mathcal{D})_{\delta<\mu}$ tiene una cota $h_\alpha/\mathcal{D}$, y podemos definir $g_\alpha(\rho) = \text{máx}\{ g_\beta(\rho), h_\alpha(\rho) \}$.

Definiendo $(c^\alpha_\gamma)_\gamma$ como en 2), 1) vale por construcción y sólo nos falta verificar 3). Sea entonces $\gamma \in [i_\alpha, \mu)$. Como $f_{i_\alpha} \leq f_\gamma$, $c^\beta_{i_\alpha} \subseteq_{J_{<\lambda}} c^\beta_\gamma$. Luego, como por escogencia de $\mathcal{D}$ $J_{<\lambda} \cap \mathcal{D} = \emptyset$, si $c^\beta_{i_\alpha} \in \mathcal{D}$, entonces $c^\beta_\gamma \in \mathcal{D}$.

Como $c^\alpha_\gamma = \{ \rho < \alpha : f_\gamma(\rho) > g_\beta(\rho), h_\alpha(\rho) \} \notin \mathcal{D}$, por escogencia de h_α, $c^\beta_{i_\alpha} \notin \mathcal{D}$. Pero $c^\alpha_{i_\alpha} \in \mathcal{D}$, por escogencia de $\mathcal{D}$, así que $c^\beta_{i_\alpha} \neq c^\alpha_{i_\alpha}$, y 3) se sigue. $\square_{(\mathrm{L45})}$

Corolario 16. $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda \longleftrightarrow \mathcal{D} \cap J_{<\lambda} \neq \emptyset$.

Dem: Supongamos, por contradicción, que $\mathrm{cf}(\prod \alpha/\mathcal{D}) = \mu < \lambda$, y que $\mathcal{D} \cap J_{<\lambda} = \emptyset$. Sea $(g_\alpha/\mathcal{D})_\alpha$ cofinal en el ultraproducto, y sea g una $\leq_{J_{<\lambda}}$-cota para $\{g_\alpha\}_\alpha$. Como $\mathcal{D} \cap J_{<\lambda} = \emptyset$, $g_\alpha \leq_\mathcal{D} g\, \forall \alpha$, una contradicción. La otra implicación es trivial. $\square_{(\mathrm{C16})}$

Corolario 17. $(J_{<\lambda})_\lambda$ *es creciente y continua.*

Dem: Obviamente la sucesión es $\subseteq$-creciente. Sea λ límite. Debemos mostrar que $J_{<\lambda} = \bigcup_{\rho<\lambda} J_{<\rho}$. $\supseteq$ es obvio. Para probar la otra contenencia, por contradicción sean $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda} \setminus \bigcup_{\rho<\lambda} J_{<\rho}$, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{b} \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \cap \bigcup_{\rho<\lambda} J_{<\rho} = \emptyset$. Entonces, como $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda}$, $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda$, y como λ es límite, $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \rho$ para algún $\rho < \lambda$. Por el corolario anterior, $\mathcal{D} \cap J_{<\rho} \neq \emptyset$, y tenemos una contradicción. $\square_{(\mathrm{C17})}$

a) Nótese que la cota no es trivial, pues en general hay $2^{2^{|\mathfrak{a}|}}$ ultrafiltros sobre $|\mathfrak{a}|$. Pero a) se deduce con rapidez de lo anterior, pues cada $J_{<\lambda} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ y si $\lambda \in \mathrm{pcf}\,\alpha$, entonces $J_{<\lambda} \neq J_{<\lambda^+}$. Como $(J_{<\lambda})_\lambda$ es continua y creciente, $|\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_| \leq 2^{|\mathfrak{a}|}$.

Pregunta 4. ¿$|\mathrm{pcf}(\mathfrak{a})| = |\mathfrak{a}|$? ¿Bajo qué hipótesis puede asegurarse esto?

c) Si $\kappa = \left|\prod \mathfrak{a}\right|$, $\mathfrak{a} \in J_{<\kappa^+}$ (y, como los $J_{<\lambda}$ son ideales, $\mathcal{P}(\mathfrak{a}) = J_{<\kappa^+}$), así que hay un mínimo λ t.q. $\mathfrak{a} \in J_{<\lambda^+}$. $\mathfrak{a} \notin J_{<\lambda}$ pues, de lo contrario o λ es sucesor, y contradiríamos su minimalidad, o es límite y por continuidad de nuevo la contradiríamos. Entonces $\mathfrak{a} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$, λ es regular, está en $\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$, y es su máximo.

e) Como $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$, $\mathrm{Sup}\,\mathfrak{a} \leq \text{máx}\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$. Pero nuestras hipótesis aseguran que $\mathrm{Sup}\,\mathfrak{a}$ *no* es regular, de modo que la desigualdad es estricta:

$$\mathrm{cf}\,\mathrm{Sup}\,\mathfrak{a} = \mathrm{cf}\,|\mathfrak{a}| \leq |\mathfrak{a}| < \text{mín}\,\mathfrak{a} < \mathrm{Sup}\,\mathfrak{a}.$$

i) En general, si $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda^+}(\mathfrak{a}) \setminus J_{<\lambda}(\mathfrak{a})$, $\mathrm{tcf}\left(\prod \mathfrak{b}/J_{<\lambda}(\mathfrak{a})\right) = \lambda$.

Lema 46. *Sean I un ideal sobre $\mathfrak{a}$, λ regular y $(f_\alpha)_\alpha \in {}^\lambda \prod \mathfrak{a}$. Si $(f_\alpha/I)_\alpha$ es creciente y no acotada en $\prod \mathfrak{a}/I$, entonces hay una sucesión $(\mathfrak{b}_\beta)_{\beta<\lambda}$ de subconjuntos de $\mathfrak{a}$ t.q.*

1) $\mathfrak{b}_0 \notin I$.
2) $\beta_1 < \beta_2 < \lambda \longrightarrow \mathfrak{b}_{\beta_1} \subseteq_I \mathfrak{b}_{\beta_2}$.
3) *Si $\beta < \lambda$, $\left((f_\alpha \restriction \mathfrak{b}_\beta)/I\right)_\alpha$ es cofinal en $\prod \mathfrak{b}_\beta/I$, y*
4) *Hay una función $g \in \prod \mathfrak{a}$ que acota $(f_\alpha)_\alpha$ módulo el ideal generado por $I \cup \{ \mathfrak{b}_\beta : \beta < \lambda \}$.*

Dem: $\lambda > |\mathfrak{a}|^+$ pues $(f_\alpha/I)_\alpha$ es no acotado, y $\min \mathfrak{a} > |\mathfrak{a}|^+$. Procedamos por contradicción. Por inducción en $\alpha < |\mathfrak{a}|^+$, definamos $g_\alpha \in \prod \mathfrak{a}$ t.q. $\alpha < \beta < |\mathfrak{a}|^+ \longrightarrow g_\alpha(\rho) \le g_\beta(\rho)\, \forall \rho \in \mathfrak{a}$, y hagamos $\mathfrak{b}^\alpha_\mu = \{\, \rho \in \mathfrak{a} : g_\alpha(\rho) < f_\mu(\rho) \,\}$.

Nótese que g_α acota $(f_\beta)_\beta$ módulo el ideal generado por $I \cup \{\, \mathfrak{b}^\alpha_\mu : \mu < \lambda \,\}$, $\alpha < \beta \longrightarrow \mathfrak{b}^\beta_\mu \subseteq \mathfrak{b}^\alpha_\mu$ $(\mu < \lambda)$ y $\mu_1 < \mu_2 < \lambda \longrightarrow \mathfrak{b}^\alpha_{\beta_1} \subseteq_I \mathfrak{b}^\alpha_{\beta_2}$. Como $(f_\alpha/I)_\alpha$ es no acotada, $\exists \mu(\alpha)\, \forall \mu \ge \mu(\alpha)\, (\mathfrak{b}^\alpha_\mu \notin I)$. Esto implica (estamos suponiendo que el lema es falso) que '3) no se cumple', es decir, falla $\forall \alpha < |\mathfrak{a}|^+$, con $\mathfrak{b}_\mu = \begin{cases} \mathfrak{b}^\alpha_\mu & \text{si } \mu \ge \mu(\alpha) \\ \mathfrak{b}^\alpha_{\mu(\alpha)} & \mu < \mu(\alpha) \end{cases}$. La prueba es similar a la del Lema 45, pues la contradicción consistirá en mostrar que si μ es grande, $\mathfrak{b}^{\alpha+1}_\mu \subsetneq \mathfrak{b}^\alpha_\mu$. Como $\lambda > |\mathfrak{a}|^+$, basta mostrar que $\forall \alpha$ esto ocurre con μ suficientemente grande, dependiendo de α.

Sea $g_0 \in \prod \mathfrak{a}$ arbitrario, y $g_\alpha(\rho) = \operatorname{Sup}_{\beta<\alpha} g_\beta(\rho)$, para α límite. Si g_α es dada, sea $\mu_\alpha \ge \mu(\alpha)$ t.q. $\big((f_\rho \restriction_{\mathfrak{b}^\alpha_{\mu_\alpha}})/I\big)_{\rho<\lambda}$ es no cofinal en $\prod \mathfrak{b}^\alpha_{\mu_\alpha}/I$, y sea $h \in \prod \mathfrak{a}$ un testigo. $(h \restriction_{\mathfrak{b}^\alpha_\mu})/I$ es no acotado por $\big((f_\rho \restriction_{\mathfrak{b}^\alpha_\mu})/I\big)_\rho\, \forall \mu \ge \mu_\alpha$.

Entonces $g_{\alpha+1}(\rho) = \max\big(g_\alpha(\rho), h(\rho)\big)$ sirve, pues si $\mu \ge \mu_\alpha$ hay un $\rho \in \mathfrak{b}^\alpha_\mu$ con $h(\rho) > f_\mu(\rho)$ y, por definición de $g_{\alpha+1}$, $\rho \notin \mathfrak{b}^{\alpha+1}_\mu$. $\square_{(\mathrm{L46})}$

Corolario 18. *Sea I un ideal sobre $\mathfrak{a}$.*

a) *Si $\prod \mathfrak{a}/I$ es λ-dirigido, $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro disyunto de I y $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda$, entonces $\mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{b}/I) = \lambda$ para algún $\mathfrak{b} \in \mathcal{D}$.*

b) *Si $\forall \mathcal{D}$ ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ disyunto de I $\big(\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda\big)$, entonces $\mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{a}/I) = \lambda$.*

c) *Si $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$, entonces $\mathrm{tcf}\big(\prod \mathfrak{b}/J_{<\lambda}(\mathfrak{a})\big) = \lambda$.*

Dem: a) Sea $(f_\alpha/\mathcal{D})_{\alpha<\lambda}$ creciente y cofinal en $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}$. Como $\prod \mathfrak{a}/I$ es λ-dirigido, s.p.d.g. $(f_\alpha/I)_\alpha$ es creciente, y como $\mathcal{D} \cap I = \emptyset$, es cofinal. Sea $(\mathfrak{b}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ como en el lema. Para cada α, $\big((f_\beta \restriction_{\mathfrak{b}_\alpha})/I\big)_{\beta<\lambda}$ es creciente y cofinal en $\prod \mathfrak{b}_\alpha/I$, así que basta mostrar que, para algún α, $\mathfrak{b}_\alpha \in \mathcal{D}$. Si esto no fuera así, $\mathcal{D}$ sería disyunto del ideal generado por $I \cup \{\, \mathfrak{b}_\alpha : \alpha < \lambda \,\}$, pero esto no es posible pues, módulo este ideal, $(f_\alpha)_\alpha$ es acotada.

b) Obviamente, $J_{<\lambda} \subseteq I$ y, por tanto, $\prod \mathfrak{a}/I$ es λ-dirigido. Si $I^* = I \cup \{\, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} : \mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{b}/I) = \lambda \,\}$, I^* es un ideal. Por ejemplo, si $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ es creciente y cofinal en $\prod \mathfrak{b}/I$ y $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$, $\big((f_\alpha \restriction_{\mathfrak{c}})/I\big)_\alpha$ es creciente y cofinal en $\prod \mathfrak{c}/I$, porque I es un ideal. Luego, si $\mathfrak{b} \in I^*$ y $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \in I^*$.

Para terminar basta mostrar que $\mathfrak{a} \in I^*$. Pero si esto no ocurre podemos tomar un ultrafiltro $\mathcal{D}$ disyunto de I^*. $\mathcal{D}$, I satisfacen las condiciones de a), así que hay un $\mathfrak{b} \in \mathcal{D}$ con $\mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{b}/I) = \lambda$. Luego, $\mathfrak{b} \in I^*$, una contradicción.

c) Sea I el ideal generado por $J_{<\lambda} \cup \{\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}\}$, y sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro disyunto de I. Entonces $\mathfrak{b} \in \mathcal{D}$ y $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) \ge \lambda$, de modo que $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda$. Por b), $\mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{a}/I) = \lambda$. Como $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b} \in I$, $\mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{b}/J_{<\lambda}) = \lambda$. $\square_{(\mathrm{C18})}$

Ahora i) es inmediato de la parte c) del corolario (y g), abajo).

g) Daremos la demostración con la hipótesis adicional de que $\min \mathfrak{a} > 2^{|\mathfrak{a}|}$. Para el caso general, ver [Sh8] cap. VIII. Por continuidad, es suficiente mostrar que $J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ es generado por un sólo elemento.

Lema 47. *Si* $\{\mathfrak{b}_\alpha\}_{\alpha<\mu} \subseteq J_{<\lambda^+}$, $\mu < \lambda$, *entonces existe* $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda^+}$ *t.q.* $\forall \alpha < \mu\,(\mathfrak{b}_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}} \mathfrak{b})$.

Dem: S.p.d.g. $\{\mathfrak{b}_\alpha\}_\alpha \subseteq J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Por el Corolario 18.c), $\operatorname{tcf}(\prod \mathfrak{b}_\alpha / J_{<\lambda}(\mathfrak{a})) = \lambda\, \forall \alpha < \mu$. Sea $(f^\alpha_\beta)_\beta \in {}^\lambda \prod \mathfrak{a}$ un testigo.

Como $\prod \mathfrak{a}/J_{<\lambda}$ es λ-dirigido, por inducción pueden hallarse funciones $(f_\beta)_{\beta<\lambda} \in {}^\lambda \prod \mathfrak{a}$ t.q. f_β acota $\{\, f^\alpha_\beta : \alpha < \mu \,\} \cup \{\, f_\gamma : \gamma < \beta \,\}$ módulo $J_{<\lambda}$. Claramente, como las $(f^\alpha_\beta)_\beta$ son no acotadas módulo $J_{<\lambda}$ para cada α, $(f_\beta)_\beta$ es no acotada.

Por el Lema 46, hay una sucesión $(\mathfrak{c}_\alpha)_\alpha$ de subconjuntos de $\mathfrak{a}$ y una $g \in \prod \mathfrak{a}$ como ahí, con $I = J_{<\lambda}$: $\left((f_\beta \restriction_{\mathfrak{c}_\alpha})/J_{<\lambda}\right)_\beta$ es cofinal en $\prod \mathfrak{c}_\alpha / J_{<\lambda}$ para cada $\alpha < \lambda$, g acota $(f_\beta)_\beta$ módulo $\langle J_{<\lambda} \cup \{\mathfrak{c}_\alpha\}_\alpha \rangle$ ($\langle A \rangle$ es el ideal generado por $A \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a})$), $\mathfrak{c}_0 \notin J_{<\lambda}$, $\mathfrak{c}_{\beta_1} \subseteq_{J_{<\lambda}} \mathfrak{c}_{\beta_2}$ si $\beta_1 < \beta_2$.

Afirmación. $\forall \alpha < \mu\, \exists \gamma < \lambda\, (\mathfrak{b}_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}} \mathfrak{c}_\gamma)$.

Dem: Si no fuera así, sea α un contraejemplo, de modo que existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$ disyunto de $J_{<\lambda}$ con $\mathfrak{b}_\alpha \setminus \mathfrak{c}_\gamma \in \mathcal{D}\, \forall \gamma < \lambda$ (por ejemplo, $(\mathfrak{b}_\alpha \setminus \mathfrak{c}_\gamma) \cap (\mathfrak{b}_\alpha \setminus \mathfrak{c}_\mu) = (\mathfrak{b}_\alpha \setminus \mathfrak{c}_\gamma) \setminus (\mathfrak{c}_\mu \setminus \mathfrak{c}_\gamma) \notin J_{<\lambda}$, si $\mu \leq \gamma$).

$\left((f_\beta \restriction_{\mathfrak{b}_\alpha})/J_{<\lambda}\right)_\beta$ es cofinal en $\prod \mathfrak{b}_\alpha / J_{<\lambda}$, por construcción de los f_β. Entonces $(f_\beta/\mathcal{D})_\beta$ es cofinal en $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}$ (pues si $g \in \prod \mathfrak{a}$, $g \restriction_{\mathfrak{b}_\alpha} \leq_{J_{<\lambda}} f_\beta \restriction_{\mathfrak{b}_\alpha}$ para algún β, y $\mathfrak{b}_\alpha \in \mathcal{D}$). Esto es una contradicción, pues g las acota (ya que $\mathfrak{c} = \{\, \mu : g(\mu) \leq f_\beta(\mu) \,\} \in \langle J_{<\lambda} \cup \{\mathfrak{c}_\alpha\}_\alpha \rangle$ para cada β. Entonces hay un $B \in J_{<\lambda}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ t.q. $\mathfrak{c} \subseteq B \cup \mathfrak{c}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{c}_{\alpha_n}$. Si $\mathfrak{c} \in \mathcal{D}$, como $B \in J_{<\lambda}$, s.p.d.g. $\mathfrak{c}_{\alpha_1} \in \mathcal{D}$. Pero $\mathfrak{b}_\alpha \setminus \mathfrak{c}_{\alpha_1} \in \mathcal{D}$). $\square_{(\mathrm{Af})}$

Por la afirmación, para cada $\alpha < \mu$ podemos escoger $\gamma = \gamma_\alpha$ con $\mathfrak{b}_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}} \mathfrak{c}_\gamma$. Como λ es regular, $\gamma' = \operatorname{Sup}_\alpha \gamma_\alpha < \lambda$. Como los $\mathfrak{c}_\gamma$ son crecientes módulo $J_{<\lambda}$, $\mathfrak{b}_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}} \mathfrak{c}_{\gamma'}$. Para terminar la demostración basta ver que $\mathfrak{c}_{\gamma'} \in J_{<\lambda^+}$.

En efecto, si $\mathfrak{c}_\gamma \in \mathcal{D}$, un ultrafiltro, como $\left((f_\beta \restriction_{\mathfrak{c}_{\gamma'}})/J_{<\lambda}\right)_\beta$ es cofinal en $\prod \mathfrak{c}_{\gamma'}/J_{<\lambda}$, si $\mathfrak{c}_{\gamma'} \notin J_{<\lambda}$, como arriba se llega a que $(f_\beta/\mathcal{D})_\beta$ es cofinal en $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}$. En cambio, si $\mathfrak{c}_{\gamma'} \in J_{<\lambda}$, $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda$. En cualquier caso, $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda^+$, y $\mathfrak{c}_{\gamma'} \in J_{<\lambda^+}$. $\square_{(\mathrm{L47})}$

Supongamos que $J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda} \neq \emptyset$. Entonces $\lambda \geq \text{mín}(\operatorname{pcf} \mathfrak{a}) = \text{mín}\, \mathfrak{a} > 2^{|\mathfrak{a}|} \geq |J_{<\lambda^+}|$. Por el lema, hay un $\mathfrak{c} \in J_{<\lambda^+}$ t.q. todo elemento de $J_{<\lambda^+}$ está $J_{<\lambda}$-contenido en $\mathfrak{c}$. Luego, $J_{<\lambda^+}(\mathfrak{a}) = \langle J_{<\lambda}(\mathfrak{a}) \cup \{\mathfrak{c}\} \rangle$, como queríamos mostrar.

La demostración de Shelah de que sólo es necesario asumir que $|\mathfrak{a}|^+ < \text{mín}\, \mathfrak{a}$ es bastante más elaborada. Utiliza un lema combinatorio sobre 'reflexión' de conjuntos estacionarios, y argumentos de teoría de modelos, formando cadenas de subestructuras elementales de los H_κ (construidos usando el lema combinatorio). Con ayuda de la cadena, construye subconjuntos de λ asociados con el estacionario $\{\, \delta < \lambda : \operatorname{cf}(\delta) = \kappa \,\}$, para κ regular $< \lambda$, y con estos subconjuntos puede construir una cota para una sucesión de λ generadores de $J_{<\lambda^+}$ sobre $J_{<\lambda}$ que había conseguido previamente, mediante un razonamiento similar al aquí mostrado. La idea de considerar subestructuras de los H_κ es muy fructífera, y pronto la volveremos a encontrar.

A partir de ahora, fijemos una familia de *generadores* $\mathfrak{b}_\lambda$ de $J_{<\lambda^+}(\mathfrak{a}) \setminus J_{<\lambda}(\mathfrak{a})$ con $\lambda \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$. Nótese que si $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'_\lambda = \mathfrak{b}_\lambda \cap \mathfrak{a}'$ es un generador de $J_{<\lambda^+}(\mathfrak{a}') \setminus J_{<\lambda}(\mathfrak{a}')$; de modo que, si $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ e I es un ideal propio sobre $\mathfrak{b}$, $\operatorname{tcf}(\prod \mathfrak{b}/I) = \lambda$ sii hay un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ $\mathcal{D}$ disyunto de I con $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda$. En particular, si λ es la verdadera cofinalidad de un producto reducido de un subconjunto de $\mathfrak{a}$, $\lambda \in \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$. Además,

- $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \mathrm{mín}\{\,\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \in \mathcal{D}\,\}$ *para todo ultrafiltro* $\mathcal{D}$ *sobre* $\mathfrak{a}$.

Dem: En efecto, si $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda$, sea $\mathfrak{b} \in \mathcal{D} \cap J_{<\lambda^+}$. Entonces $\mathfrak{b} \subseteq_{J_{<\lambda}} \mathfrak{b}_\lambda$, por definición de $\mathfrak{b}_\lambda$, y como $\mathcal{D} \cap J_{<\lambda} = \emptyset$, $\mathfrak{b} \subseteq_{\mathcal{D}} \mathfrak{b}_\lambda$. Entonces $\mathfrak{b}_\lambda \in \mathcal{D}$, y si $\mu < \lambda$ y $\mathfrak{b}_\mu \in \mathcal{D}$, entonces $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \mu^+ \leq \lambda$, una contradicción. Nótese que esto da otra demostración de que $|\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}| \leq 2^{|\mathfrak{a}|}$. $\square_{(\bullet)}$

f) Sea $\lambda \in \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$. Obviamente, $\lambda = \mathrm{máx}\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{b}_\lambda$. $\lambda \notin \mathrm{pcf}(\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}_\lambda)$, pues el generador para λ inducido por $\mathfrak{b}_\lambda$ es $\emptyset$.

h) Nótese que la afirmación de que las f^λ_μ, $\mu \in \lambda$, son cofinales en $\prod \mathfrak{a}/\langle J_{<\lambda} \cup \{\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}_\lambda\}\rangle$ para $\lambda \in \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$ equivale a decir que $(f^\lambda_\mu \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda})_\mu$ es cofinal en $\prod \mathfrak{b}_\lambda / J_{<\lambda}$, y una familia así existe, por el Corolario 18.c).

d) Por inducción en $\lambda \in \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$ mostremos que si $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda^+}$, $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{b}) = \mathrm{máx}\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{a} \in J_{<(\mathrm{máx}\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a})^+}$, esto implica lo querido. El orden de $\prod \mathfrak{b}$ es puntual (coordenada a coordenada).

Supongamos que ya lo hemos mostrado para todo $\lambda' < \lambda$. Sea $\mathfrak{b} \in J_{<\lambda^+}$. S.p.d.g., $\mathfrak{b} \notin J_{<\lambda}$. Por g), podemos hallar $(f_\alpha)_\alpha \in {}^\lambda \prod \mathfrak{b}$ $<_{J_{<\lambda}}$-creciente y cofinal en $\prod \mathfrak{b}/J_{<\lambda}$.
Así, $\mathrm{máx}\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{b} = \lambda \leq \mathrm{cf}(\prod \mathfrak{b})$.
Si $\mathfrak{c} \in J_{<\lambda}$, sea $F_\mathfrak{c} \subseteq \prod \mathfrak{c}$ cofinal, $|F_\mathfrak{c}| = \mathrm{máx}\,\mathrm{pcf}\,\mathfrak{c} < \lambda$. $F_\mathfrak{c}$ existe por hipótesis de inducción.

Sean χ regular y suficientemente grande[3], y sea $<^*_\chi$ un buen orden (arbitrario) de H_χ. Por inducción en $\alpha < |\mathfrak{a}|^+$ definamos N_α, g_α t.q.

(A) i) $N_\alpha \prec \langle H_\chi, \in, <^*_\chi\rangle$.
ii) $|N_\alpha| = \lambda$.
iii) $(N_\beta)_{\beta\leq\alpha} \in N_{\alpha+1}$.
iv) $(N_\alpha)_{\alpha<|\mathfrak{a}|^+}$ es creciente y continua.
v) $(\{\beta : \beta \leq \lambda + 1\} =)\lambda + 2$, $\mathfrak{b}$, $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ y la función $\mathfrak{c} \mapsto F_\mathfrak{c}$ están en N_0.

(B) i) $g_\alpha \in \prod \mathfrak{b}$, $g_\alpha \in N_{\alpha+1}$.
ii) No hay ninguna $f \in N_\alpha \cap \prod \mathfrak{b}$ t.q. $g_\alpha < f$.
iii) Si $\beta < \alpha$, entonces $g_\beta(\rho) < g_\alpha(\rho)\ \forall \rho \in \mathfrak{a}$.

No hay ningún problema en satisfacer (A). Nótese que si g_α no se puede encontrar, $N_\alpha \cap \prod \mathfrak{b}$ muestra que $\mathrm{cf}(\prod \beta) \leq \lambda$, así que supongamos que la construcción es posible (podemos tomar en cada caso g_α como el $<^*_\chi$-menor entre los candidatos). Para $\alpha < |\mathfrak{a}|^+$ sea $\beta_\alpha < \lambda$ t.q. $g_\alpha <_{J_{<\lambda}} f_{\beta_\alpha}$, de modo que si $\beta_\alpha \leq \beta < \lambda$ entonces $g_\alpha <_{J_{<\lambda}} f_\alpha$. Sea $\alpha < \lambda$ mayor que $\mathrm{Sup}_{\gamma<|\mathfrak{a}|^+} \beta_\gamma$. Si $\mathfrak{c}_\beta = \{\,\rho \in \mathfrak{b} : g_\beta(\rho) \geq f_\alpha(\rho)\,\}$, $(c_\beta)_{\beta<|\mathfrak{a}|^+}$ es creciente [por (B) iii)], de modo que es eventualmente cte.; digamos, para $\beta \geq \beta'$. $\mathfrak{c}_{\beta'} \in J_{<\lambda}$, pues $g_\beta <_{J_{<\lambda}} f_\alpha\ \forall\beta$, así que $F_{\mathfrak{c}_{\beta'}}$ existe.

Nótese que $\mathfrak{c}_{\beta'} \in N_{\beta'+1}$ ya que f_α y g'_β pertenecen, y por tanto $F_{\mathfrak{c}_{\beta'}} \subseteq N_{\beta'+1}$. Ahora bien:

$$g_{\beta'+1} \restriction_{\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{c}_{\beta'}} = g_{\beta'+1} \restriction_{\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{c}_{\beta'+1}} < f_\alpha \restriction_{\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{c}_{\beta'+1}} = f_\alpha \restriction_{\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{c}_{\beta'}},$$

[3] Es decir, t.q. todas las afirmaciones que siguen pueden observarse en H_χ; esto es, todos los conjuntos envueltos y testigos de fórmulas existenciales que se empleen están en H_χ. Tal cosa es posible, cf. Teorema 6.

la desigualdad por definición de $\mathfrak{c}_{\beta'+1}$.

Como $g_{\beta'+1} \restriction_{\mathfrak{c}_{\beta'}} < f$ para algún $f \in F_{\mathfrak{c}_{\beta'}} \subseteq N_{\beta'+1}$, pues $c_{\beta'} \in J_{<\lambda}$, $g_{\beta'+1} \leq \text{máx}\{f_\alpha, f\} \in N_{\beta'+1}$. Esto contradice la definición de $g_{\beta'+1}$, con lo que concluye la prueba de d), y por tanto del teorema. $\square_{(T37)}$

La relevancia de la teoría para la aritmética cardinal está en que, si $\mathfrak{a}$ es un intervalo de regulares (i.e., $\mathfrak{a} = \{\lambda \in \text{Reg} : \text{mín}\,\mathfrak{a} \leq \lambda < (\text{o } \leq) \operatorname{Sup}\mathfrak{a}\}$) que satisfacen hipótesis 'razonables', $\text{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{a} = |\prod \mathfrak{a}|$, como veremos en la sección 3. Por ejemplo, si $\mathfrak{a} = \{\aleph_n\}_{n>1}$, $\text{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{a} = \prod_n \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$. Además, si $\operatorname{Sup}\mathfrak{a} < \rho < \lambda$ y $\lambda \in \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$, $\rho \in \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$ ($\operatorname{pcf}\mathfrak{a}$ es un intervalo de regulares). Por tanto, $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{|\operatorname{pcf}\mathfrak{a}|^+}$, de modo que para hallar cotas en la exponenciación basta buscar cotas en $|\operatorname{pcf}\mathfrak{a}|$. Pero nótese que la generalización natural de este ejemplo no se aplica a los puntos fijos.

a. Propiedades de los Generadores.

Hay infinitas familias de generadores para $\operatorname{pcf}\mathfrak{a}$. Por ejemplo, si $\mathfrak{b}_\lambda$ se cambia en un conjunto finito no importa. Pero están, a pesar de eso, sujetas a severas restricciones, pues $\mathfrak{b}_\lambda$ es único módulo $J_{<\lambda}$.

El siguiente resultado incluye las propiedades más importantes de los generadores, además de las mostradas previamente.

Teorema 38. *Sea* $\{\mathfrak{b}_\lambda : \lambda \in \operatorname{pcf}\mathfrak{a}\}$ *una familia de generadores para* $\operatorname{pcf}\mathfrak{a}$.

a) *[Compacidad]* $\forall X \subseteq \mathfrak{a}\, \exists F \in [\operatorname{pcf} X]^{<\omega} (X \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} \mathfrak{b}_\alpha)$. *Un F así es llamado un soporte de X, y supondremos fijo uno que notaremos $s(X)$.*

b) *[Transitividad] Si* $2^{|\mathfrak{a}|} < \text{mín}\,\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{c} = \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$, *se pueden escoger generadores* $(\mathfrak{b}_\lambda(\mathfrak{c}))_\lambda$ *($\mathfrak{b}_\lambda(\mathfrak{c})$ genera $J_{\lambda^+}(\mathfrak{c})$ sobre $J_{<\lambda}(\mathfrak{c})$) de modo que si $\rho \in \mathfrak{b}_\lambda$ entonces $\mathfrak{b}_\rho \subseteq \mathfrak{b}_\lambda$ (Shelah llama* suave *a una familia de generadores con esta propiedad). También pueden escogerse con $\operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\lambda = \mathfrak{b}_\lambda$ (Shelah llama entonces* cerrada *a la familia).*

c) *[Localización] Sea* $x \subseteq \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$, $|x| < \text{mín}\,x$, $\lambda \in \operatorname{pcf} x$. $\exists x_0 \subseteq x (|x_0| \leq |\mathfrak{a}|$ *y* $\lambda \in \operatorname{pcf} x)$.

d) *Supongamos que* $2^{|\mathfrak{a}|} < \text{mín}\,\mathfrak{a}$. *Si* $\{\mathfrak{b}_\lambda\}_\lambda$ *es una familia transitiva (suave), y $s(x)$ para $x \subseteq \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$ es como en a),* $\mathfrak{a} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ *implica*

$$\operatorname{pcf}\mathfrak{a} = \bigcup\{\operatorname{pcf}(\mathfrak{b}_\lambda) : \lambda \in \operatorname{pcf}(\bigcup_{i \in I} s(\operatorname{pcf}\mathfrak{a}_i))\}.$$

Por tanto, $\text{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{a} = \text{máx}\operatorname{pcf}\bigcup_{i \in I} s(\operatorname{pcf}\mathfrak{a}_i)$.

Dem: a) Supongamos que no, y sea x un contraejemplo. Sea $I = \{\mathfrak{b} \subseteq x : \exists F \in [\operatorname{pcf} x]^{<\omega} (\mathfrak{b} \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} \mathfrak{b}_\alpha)\}$. I es un ideal propio sobre x, así que podemos escoger $\mathcal{D}$, un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$, con $x \in \mathcal{D}$ y disyunto de I. Sea $\theta = \operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D})$. $\theta \in \operatorname{pcf} x$, y $\mathfrak{b}_\theta \in \mathcal{D}$. Entonces $\mathfrak{b}_\theta \cap x \in \mathcal{D} \cap I$, una contradicción.

d) Sea $\mathfrak{b} = \bigcup_{i \in I} s(\operatorname{pcf}\mathfrak{a}_i)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \bigcup_i \mathfrak{a}_i \subseteq \bigcup_i \operatorname{pcf}\mathfrak{a}_i = \bigcup_i \bigcup\{\mathfrak{b}_\lambda : \lambda \in s(\operatorname{pcf}\mathfrak{a}_i)\} \\ &= \bigcup\{\mathfrak{b}_\lambda : \lambda \in \mathfrak{b}\} \subseteq \bigcup\{\mathfrak{b}_\lambda : \lambda \in \bigcup_{\mu \in s(\mathfrak{b})} \mathfrak{b}_\mu\} \subseteq \bigcup_{\mu \in s(\mathfrak{b})} \mathfrak{b}_\mu,\end{aligned}$$

la segunda igualdad y la segunda contenencia por compacidad, la última contenencia por transitividad.

Entonces $\operatorname{pcf}\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{pcf}\big(\dot{\bigcup}_{\mu \in s(\mathfrak{b})} \mathfrak{b}_\mu\big) = \bigcup_{\mu \in s(\mathfrak{b})} \operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\mu \subseteq \{\operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\mu : \mu \in \operatorname{pcf}\mathfrak{b}\}$.

La otra inclusión es clara: Como $\mathfrak{b}_\mu \subseteq \operatorname{pcf}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, entonces $\operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\mu \subseteq \operatorname{pcf}\mathfrak{c} = \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$.

Sea $\lambda = \operatorname{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{a}$. $\lambda \in \operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\nu$ para algún $\nu \in \operatorname{pcf}\mathfrak{b}$, así que $\lambda \leq \operatorname{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\nu = \nu$. Pero $\nu \leq \lambda$.

c) Ver [Sh8] cap. VIII. En [BuMa] se da una demostración usando b).

b) Ver [Sh8] cap. I o [BuMa] para la construcción de la familia transitiva. De nuevo, utiliza una sucesión de subestructuras de H_χ para χ grande, pero los detalles son bastante más intrincados.

Mostremos que si $\{\mathfrak{b}_\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{c}}$ es transitiva, además se puede suponer cerrada:

Supongamos que $\{\mathfrak{b}_\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{c}}$ es transitiva. Por inducción en $\lambda \in \mathfrak{c} = \operatorname{pcf}\mathfrak{c}$ definamos una nueva familia $\{\mathfrak{b}^*_\lambda\}_\lambda$ transitiva y cerrada: Si $\lambda = \operatorname{mín}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}^*_\lambda = \mathfrak{b}_\lambda = \{\lambda\}$. Supongamos dada $\{\mathfrak{b}^*_\theta\}_{\theta<\lambda}$. Por compacidad, como $\operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\lambda \subseteq \lambda + 1$, hay $\theta_1, \dots, \theta_n \in \lambda \cap \operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\lambda$ con $\operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\lambda \subseteq \mathfrak{b}_\lambda \cup \bigcup_1^n \mathfrak{b}^*_{\theta_i}$. Sea $\mathfrak{b}^*_\lambda = \mathfrak{b}_\lambda \cup \bigcup_1^n \mathfrak{b}^*_{\theta_i}$. Por construcción, $\{\mathfrak{b}^*_\lambda\}_\lambda$ es una familia de generadores, y es cerrada porque (por inducción)

$$\operatorname{pcf}(\mathfrak{b}^*_\lambda) = \operatorname{pcf}(\mathfrak{b}_\lambda) \cup \bigcup_1^n \operatorname{pcf}(\mathfrak{b}^*_{\theta_i}) = \mathfrak{b}_\lambda \cup \bigcup_1^n \mathfrak{b}^*_{\theta_i} = \mathfrak{b}^*_\lambda.$$

Sólo hay que verificar la transitividad. La prueba, a su vez, es por inducción: Supongamos $\mu \in \mathfrak{b}^*_\lambda$, y que $\forall\beta < \mu\,(\beta \in \mathfrak{b}^*_\lambda \to \mathfrak{b}^*_\beta \in \mathfrak{b}^*_\lambda)$. Si $\mu \in \mathfrak{b}^*_{\theta_i}$ donde $1 \leq i \leq n$, por inducción $\mathfrak{b}^*_\mu \subseteq \mathfrak{b}^*_{\theta_i} \subseteq \mathfrak{b}^*_\lambda$. Así, podemos suponer $\mu \in \mathfrak{b}_\lambda$. Entonces $\mathfrak{b}_\mu \subseteq \mathfrak{b}_\lambda \subseteq \mathfrak{b}^*_\lambda$. Sean $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mu \cap \operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\mu \subseteq \operatorname{pcf}\mathfrak{b}_\lambda \subseteq \mathfrak{b}^*_\lambda$ t.q. $\mathfrak{b}^*_\mu = \mathfrak{b}_\mu \cup \bigcup_1^k \mathfrak{b}^*_{\delta_i}$. Por la hipótesis de inducción en μ, $\mathfrak{b}^*_{\delta_i} \subseteq \mathfrak{b}^*_\lambda$ para $1 \leq i \leq k$, y la prueba está completa. $\square_{(\mathrm{T38})}$

b. Intervalos y Seudopotencias.

Def. 46. Si $\operatorname{cf}\lambda \leq \kappa < \lambda$, la *seudopotencia* $\operatorname{pp}_\kappa(\lambda)$ es el supremo de $\operatorname{PP}_\kappa(\lambda) = \{\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{F}) : \mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$ que no contiene conjuntos acotados de λ y $\mathfrak{a}$ es un conjunto de a lo más κ regulares menores que, y cofinales en, $\lambda\}$.

Suprimimos la mención a κ si $\kappa = \operatorname{cf}\lambda$: $\operatorname{pp}(\lambda) = \operatorname{pp}_{\operatorname{cf}\lambda}(\lambda)$ y $\operatorname{PP}(\lambda) = \operatorname{PP}_{\operatorname{cf}\lambda}(\lambda)$.

Shelah explica que las seudopotencias son más difíciles de modificar mediante forcing que las potencias normales, de modo que son preferibles en este sentido, y 'reflejan' el valor de estas potencias, incluso ayudando a entender su comportamiento. La semejanza se puede llevar más lejos, en términos de cardinales asociados a 'cubrimientos' de subconjuntos de los cardinales en consideración, que asemejan la cofinalidad. Como no necesitaremos esto (por ahora) no entraremos en detalles.

Teorema 39. *Sea* $\operatorname{cf}\lambda \leq \kappa < \lambda$.

a) $\operatorname{pp}_\kappa(\lambda) \leq \lambda^\kappa$. *La igualdad se cumple si, p.ej.,* $\lambda < \aleph_\lambda$ *y* $\forall\mu < \lambda\,(\mu^\kappa < \lambda)$.

b) $\operatorname{PP}_\kappa(\lambda)$ *es un intervalo de regulares, con mínimo* λ^+. $\square_{(\mathrm{T39})}$

No mostraremos el teorema, pero sí mencionamos unos comentarios: la desigualdad es obvia. Nótese que la 'κ-inaccesibilidad' de λ implica $\lambda^\kappa = \lambda^{\operatorname{cf}\lambda}$. Puede hallarse $\mathfrak{a}$, una familia de tamaño $\operatorname{cf}\lambda$ de cardinales regulares, cofinal en λ, con $(\operatorname{cf}\lambda)^+ < \text{mín}\,\mathfrak{a}$. Por hipótesis, $(\text{mín}\,\mathfrak{a})^{\operatorname{cf}\lambda} < \lambda$. Bajo estas condiciones, veremos en el Teorema 42 que $\text{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{a} = \left|\prod \mathfrak{a}\right| = \lambda^{\operatorname{cf}\lambda}$. Así, basta ver que el ultrafiltro que realiza $\text{máx}\operatorname{pcf}\mathfrak{a}$ es testigo de que $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} \in \mathrm{PP}_\kappa(\lambda)$. Acá es donde debe usarse que $\lambda < \aleph_\lambda$. Esta hipótesis estará presente constantemente en las cotas que obtengamos (i.e., de otra forma son triviales), así como lo estuvo en el capítulo pasado, al discutir los trabajos de Galvin y Hajnal.

Shelah postula que trabajar con $\operatorname{pcf}\mathfrak{a}$, $\mathrm{pp}_\kappa\lambda$ debería remplazar el trabajo con la exponenciación. En [Sh8] cáp. II muestra, por ejemplo, que el resultado de Solovay sobre fuertemente compactos generaliza a este contexto. Así, si μ es supercompacto, o fuertemente compacto, $\lambda > \mu > \operatorname{cf}\lambda$ y en una extensión de V, V$'$, $\mathrm{pp}\,\lambda > \lambda^+$, entonces no hay extensiones (forzando con un conjunto) de V$'$, en las que $(\lambda^+)^{\mathrm{V}}$ siga siendo un cardinal, y μ siga siendo fuertemente compacto. También muestra que si $\mathrm{pp}\,\lambda > \lambda^+$, entonces alguna instancia de la conjetura de Chang falla, y que, recíprocamente, si tal instancia vale, λ es $\operatorname{cf}\lambda$-inaccesible $\left(\forall\mu < \lambda\,(\mu^{\operatorname{cf}\lambda} < \lambda)\right)$ y $\operatorname{cf}\lambda > \omega$, entonces $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \lambda^+$.

Teorema 40.

a) *Si λ es singular de cofinalidad ω, existe una sucesión creciente $\{\lambda_n\}_n$ de regulares con límite λ t.q. $\operatorname{cf}\left(\dot{\prod}_n \lambda_n/\mathcal{D}\right) = \lambda^+$ para todo ultrafiltro no principal $\mathcal{D}$.*

b) *Si λ es singular de cofinalidad $\kappa > \omega$ y $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ es estríctamente creciente, continua, y tiende a λ, entonces hay un club en κ, $\mathcal{C}$, t.q. $\operatorname{cf}\left(\dot{\prod}_{\alpha\in\mathcal{C}}\lambda_\alpha^+/\mathcal{D}\right) = \lambda^+\ \forall\mathcal{D}$ disyunto de $J^{\mathrm{bd}}_{\mathcal{C}}$. Acá, $J^{\mathrm{bd}}_{\mathcal{C}}$ es el ideal de los conjuntos acotados de $\mathcal{C}$. Por tanto,*

$$\lambda^+ = \text{máx}\operatorname{pcf}\{\,\lambda^+ : \alpha \in \mathcal{C}\,\}.$$

c) *Si $\lambda = \operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D})$ y $\mu = \text{lím}_{\mathcal{D}}\,\mathfrak{a}$ es el único (cardinal) κ t.q. $\forall\beta < \kappa\,(\{\,\rho \in \mathfrak{a} : \alpha \in (\beta,\kappa]\,\} \in \mathcal{D})$, entonces $\forall\lambda'$ con $\mu < \lambda' < \lambda$ hay un conjunto $\mathfrak{a}'$ de regulares, $|\mathfrak{a}'| \le |\mathfrak{a}|$, y un ultrafiltro $\mathcal{D}'$ sobre $\mathfrak{a}'$ con $\text{lím}_{\mathcal{D}'}\,\mathfrak{a}' = \mu$ y $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}'/\mathcal{D}') = \lambda'$.*

d) *Si $\mathfrak{a} = (\beta,\mu)$ es un intervalo de regulares, λ' es regular y $\mu < \lambda' < \lambda \in \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$, entonces $\lambda' \in \operatorname{pcf}\mathfrak{a}$.*

Dem: Mostraremos c). d) se sigue trivialmente, y versiones débiles de a) y b) también (hallamos una sucesión, y un ultrafiltro $\mathcal{D}$. Pero falta otro argumento para asegurar que cualquier $\mathcal{D}$ sujeto a las hipótesis sirve). Para una prueba de b) puede verse [Sh8] cap. II, y para una de a) [Sh4]. Estos resultados implican, por supuesto, $\lambda^+ \in \mathrm{PP}(\lambda)$, y de hecho b) del Teorema 39.

La prueba es puramente combinatoria. Construiremos una sucesión $(f_\alpha/\mathcal{D})_{\alpha<\lambda'} \in {}^{\lambda'}\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}$ con supremo $g/\mathcal{D}$ t.q. $\left\{\operatorname{cf}\left(g(\alpha)\right)\right\}_{\alpha\in\mathfrak{a}}$ es cofinal en μ. Luego mostraremos que $\operatorname{cf}\left(\dot{\prod}_\alpha \operatorname{cf}\left(g(\alpha)\right)/\mathcal{D}\right) = \lambda'$.

Si μ no es límite, $\mathcal{D}$ es principal y $\lambda = \mu$, y no habría nada que probar, así que supongamos μ límite.

Lema 48. *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre κ, $\lambda > \kappa^+$ regular y $(f_\alpha/\mathcal{D})_{\alpha<\lambda}$ una λ-sucesión creciente en ${}^\kappa ORD/CalD = O_\kappa$. Diremos que $h/\mathcal{D} \in O_\kappa$ corta a $(f_\alpha/\mathcal{D})_\alpha$ sii*

$$f_\alpha/\mathcal{D} < h/\mathcal{D} < f_\beta/\mathcal{D}$$

para algunos $\alpha < \beta < \lambda$, y que $\mathcal{A} \subseteq O_\kappa$ corta cofinalmente $(f_\alpha)_\alpha$ sii $\forall\delta < \lambda \, \exists h/\mathcal{D} \in \mathcal{A}$ que corta a $(f_\gamma)_\gamma$ y el α testigo de esto es mayor que δ.

Entonces, si $(f_\alpha/\mathcal{D})_\alpha$ es no acotado en O_κ, hay una sucesión $(S_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos de ordinales t.q. $|S_\alpha| \leq \kappa$ y $\prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}$ corta cofinalmente $(f_\alpha/\mathcal{D})_\alpha$. $\square_{\text{(L48)}}$

La demostración es una construcción inductiva de cotas 'parciales' y conjuntos asociados. Si las cotas parciales no consiguen acotar realmente a $(f_\alpha/\mathcal{D})_\alpha$, entonces los conjuntos sirven como los S_α. Omitimos la demostración.

Para la sucesión $(f_\alpha/\mathcal{D})_{\alpha<\lambda'}$ que construiremos no puede haber tal familia $(S_\alpha)_\alpha$, así que debe estar acotada.

Sea $(C_\delta \subseteq \delta : \delta < \lambda'$ es límite$)$ una sucesión de clubs, C_δ con tipo de orden $\operatorname{cf}\delta$. Entonces, si

$$\mathcal{C}_\alpha = \{\, C_\delta \cap \alpha : \alpha \in C_\delta, \delta < \lambda', \delta \text{ límite} \,\} \qquad (\alpha < \lambda'),$$

$\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, $|\mathcal{C}_\alpha| \leq \lambda'$, si α es límite $\exists E \in \mathcal{C}_\alpha$ club en α con tipo de orden $\operatorname{cf}\alpha$, y $\forall\beta < \alpha \, \forall E \in \mathcal{C}_\alpha \, (E \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta)$.

Sea $f_0/\mathcal{D} \in \prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}$. Dada $(f_\gamma)_{\gamma<\beta}$, $\beta < \lambda$, hay una $h_\beta/\mathcal{D} \in \prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}$ con $f_\gamma/\mathcal{D} < h_\beta/\mathcal{D} \, \forall\gamma < \beta$. Si $E \in \mathcal{C}_\beta$, sea $g_E^\beta \in \prod \mathfrak{a}$ la función

$$\alpha \longmapsto \text{máx}\{ h_\beta(\alpha), \operatorname{Sup}\{ f_\gamma(\alpha) : \gamma \in E, \alpha > \operatorname{otp} E \}\},$$

donde otp es el tipo de orden.

Como $\lambda' < \lambda$, $(g_E^\beta/\mathcal{D})_{E \in \mathcal{C}_\beta}$ está acotada. Sea $f_\beta/\mathcal{D}$ una cota (estricta).

Afirmación. *No existen $\mu' < \mu$ y $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{a}}$ t.q. $S_\alpha \subseteq \alpha$, $|S_\alpha| \leq \mu'$, y $\prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}$ corta cofinalmente $(f_\alpha/\mathcal{D})_{\alpha<\lambda'}$.*

Dem: De lo contrario, como $|\mathfrak{a}|^+ < \text{mín}\,\mathfrak{a} < \mu$, s.p.d.g. $\mu' > |\mathfrak{a}|$. Sea $B \subseteq \lambda'$ club t.q. $\forall\gamma, \gamma' \in B \, \big(\gamma < \gamma' \to \exists g/\mathcal{D} \in \prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D} \, (f_\gamma/\mathcal{D} \leq g/\mathcal{D} \leq f_{\gamma'}/\mathcal{D})\big)$, y sea $\beta \in B$ singular de cofinalidad $(\mu')^+ < \mu$. Sea $E \in \mathcal{C}_\beta$ club con tipo de orden $\operatorname{cf}\beta$, $E \cap B$ es club en β, y sea $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha<\operatorname{cf}\beta}$ su enumeración creciente.

Para $\alpha < \operatorname{cf}\beta$, escójase $g_\alpha \in \prod_\delta S_\delta$ con $f_{\gamma_\alpha}/\mathcal{D} \leq g_\alpha/\mathcal{D} \leq f_{\gamma_{\alpha+1}}/\mathcal{D}$. Nótese que $f_{\gamma_\alpha}/\mathcal{D} > g^{\gamma_\alpha}_{E\cap\gamma_\alpha}/\mathcal{D}$, y que si $\nu > \operatorname{otp}(E \cap \gamma_\alpha)$, $g^{\gamma_\alpha}_{E\cap\gamma_\alpha}(\nu) > f_{\gamma_\tau}(\nu) \, \forall\tau < \alpha$.

Escójase ν_α, mayor que $\operatorname{otp}(E)$, con $g^{\gamma_\alpha}_{E\cap\gamma_\alpha}(\nu_\alpha) < f_{\gamma_\alpha}(\nu_\alpha) \leq g_\alpha(\nu_\alpha) \leq f_{\gamma_{\alpha+1}}(\nu_\alpha)$. Como $|\mathfrak{a}| < \mu'$, hay una colección $I \in [\operatorname{cf}\beta]^{\operatorname{cf}\beta}$ de ordinales límite, y un $\rho \in \mathfrak{a}$ con $\nu_\alpha = \rho \, \forall\alpha \in I$. Si $\tau < \chi \in I$,

$$g_\tau(\rho) \leq f_{\gamma_{\tau+1}}(\rho) \leq g^{\gamma_\chi}_{E\cap\gamma_\chi}(\rho) < f_{\gamma_\chi}(\rho) \leq g_\chi(\rho),$$

la segunda desigualdad porque $\gamma_{\tau+1} \in E \cap \gamma_\chi$, $\rho > \operatorname{otp}(E)$.

Entonces $\big(g_\alpha(\rho)\big)_{\alpha\in I}$ es estrictamente creciente. Esto es una contradicción, pues $|S_\rho| \leq \mu' < (\mu')^+ = \operatorname{cf}\beta$. $\square_{\text{(Af)}}$

Por el lema y la afirmación, hay una mínima cota superior $g/\mathcal{D} \in {}^{\mathfrak{a}}\mathrm{ORD}/\mathcal{D}$ para $(f_\beta/\mathcal{D})_{\beta<\lambda'}$. $g(\alpha) < \alpha \, \forall\alpha \in \mathfrak{a}$, s.p.d.g. pues $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda > \lambda'$. Como $(f_\beta/\mathcal{D})_\beta$ es estríctamente creciente, $\{\, \alpha \in \mathfrak{a} : g(\alpha)$ es ordinal límite$\,\} \in \mathcal{D}$, porque g es mínima cota superior. Por tanto, s.p.d.g. $\forall\alpha \in \mathfrak{a} \, (g(\alpha)$ es límite$)$. Sean $S_\alpha \subseteq g(\alpha)$ club con tipo de orden $\operatorname{cf}\big(g(\alpha)\big)$, y $\{\, S_\alpha(\beta) : \beta < \operatorname{cf}\big(g(\alpha)\big) \,\}$ su enumeración creciente.

$\lim_{\mathcal{D}} \mathrm{cf}(g(\alpha)) = \mu$, pues si $\mu' < \mu$, $\mathfrak{b} \in \mathcal{D}$ y $\mathrm{cf}(g(\alpha)) \leq \mu' \forall \alpha \in \mathfrak{b}$, como cada $g(\alpha)$ es límite, si $\beta_0 < \lambda'$ podemos hallar $g' \in \prod_\alpha S_\alpha$ con $f_{\beta_0}/\mathcal{D} < g'/\mathcal{D} < g/\mathcal{D}$. Pero, por minimalidad, $g'/\mathcal{D} < f_{\beta_1}/\mathcal{D}$ para algún $\beta_1 > \beta_0$. Entonces $\prod_\alpha S_\alpha$ corta cofinalmente a $(f_\alpha/\mathcal{D})_\alpha$, una contradicción.

Sea $\bar{f}_\beta(\alpha) = S_\alpha(\gamma)$, para $\beta < \lambda'$, donde γ es el mínimo δ t.q. $f_\beta(\alpha) \leq S_\alpha(\delta)$, si esto es posible, y arbitrario en otro caso. Nótese que la definición tiene sentido $\mathcal{D}$-c.s., pues $f_\beta/\mathcal{D} < g/\mathcal{D}$.

Entonces $\{\bar{f}_\beta\}_{\beta<\lambda'}$ es cofinal en $\prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}$, y $\mathrm{cf}(\prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}) \leq \lambda'$. La igualdad se cumple pues si $F \in [\prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}]^{<\lambda'}$, podemos hallar $\beta_0 < \lambda'$ t.q. todo elemento de F está acotado por uno de $\{\bar{f}_\beta\}_{\beta<\beta_0}$. Ahora bien: $\bar{f}_\beta <_{\mathcal{D}} g$. Entonces $\exists \gamma_\beta > \beta$ t.q. $\bar{f}_\beta <_{\mathcal{D}} f_{\gamma_\beta}$. Sea $\beta_1 < \lambda'$ una cota para $\{\gamma_\beta : \beta < \beta_0\}$. Entonces

$$\bar{f}_\beta <_{\mathcal{D}} f_{\beta_1} \leq_{\mathcal{D}} \bar{f}_{\beta_1} \quad \forall \beta < \beta_0,$$

y F no es cofinal en $\prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}$.

Definamos $\mathfrak{a}'$, $\mathcal{D}'$ por $\mathfrak{a}' = \{\mathrm{cf}\, g(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{a}\}$, $\mathcal{D}' = \{A \subseteq \mathfrak{a}' : \{\alpha \in \mathfrak{a} : \mathrm{cf}(g(\alpha)) \in A\} \in \mathcal{D}\}$. Es fácil ver que $\mathcal{D}'$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}'$, y que si $\mu' < \mu$, $\{\alpha' \in \mathfrak{a}' : \alpha' \geq \mu'\} \in \mathcal{D}'$, pues $\{\alpha : \mathrm{cf}(g(\alpha)) \geq \mu'\} \in \mathcal{D}$. Entonces $\lim_{\mathcal{D}'} \mathfrak{a}' = \mu$.

Así, $\mathcal{D}'$-c.s. los elementos de $\mathfrak{a}'$ son mayores que $|\mathfrak{a}|$, y $\bar{f}'_\beta(\mathrm{cf}\, g(\alpha)) < \mathrm{cf}\, g(\alpha)$ para casi todo α, donde

$$\bar{f}'_\beta(\mathrm{cf}\, g(\alpha)) = \mathrm{Sup}\{\delta < \mathrm{cf}\, g(\alpha) : \exists \gamma < \mathfrak{a}\, (\mathrm{cf}\, g(\gamma) = \mathrm{cf}\, g(\alpha) \wedge \bar{f}_\beta(\gamma) = S_\gamma(\delta))\}.$$

Entonces $\bar{f}'_\beta/\mathcal{D} \in \prod \mathfrak{a}'/\mathcal{D}$. Nótese que si $f' \in \prod \mathfrak{a}'$, $\underline{f}' \in \prod_\alpha S_\alpha$, donde

$$\underline{f}'(\alpha) = S_\alpha(f'(\mathrm{cf}\, g(\alpha))).$$

$\underline{f}' <_{\mathcal{D}} \bar{f}_\beta$ para algún $\beta < \lambda'$, así que $f' <_{\mathcal{D}'} \bar{f}'_\beta$. En efecto, para $\mathcal{D}$-casi todo γ, $\underline{f}'(\gamma) < \bar{f}_\beta(\gamma)$, de modo que si $f'(\mathrm{cf}\, g(\gamma)) = \tau$, donde $f(\gamma) = S_\alpha(\tau)$, $f'(\mathrm{cf}\, g(\gamma)) < \chi$, donde $\bar{f}_\beta(\gamma) = S_\alpha(\chi)$, que a lo más es $\bar{f}'_\beta(\mathrm{cf}\, g(\gamma))$.

Así, $\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}'/\mathcal{D}') \leq \lambda'$. La igualdad se cumple, pues si $F \in [\prod \mathfrak{a}'/\mathcal{D}]^{<\lambda'}$, $\{\underline{f} : f \in F\} \subseteq \prod_\alpha S_\alpha/\mathcal{D}$ está acotado por algún $\bar{f}_\beta/\mathcal{D}$, y el mismo argumento de antes muestra que $\bar{f}'_\beta/\mathcal{D}$ acota F. Esto completa la prueba. $\square_{(\mathrm{T40})}$

2. Un Ejemplo.

En esta sección probaremos el resultado prometido al final de la demostración del Teorema 1 sobre la conjetura de Tarski, para dar una idea de cómo puede aplicarse la teoría a problemas 'clásicos' de aritmética cardinal. Usaremos un resultado que veremos en la siguiente sección. Seguimos, de nuevo, [JSh1].

Teorema 41. *Si hay un contraejemplo a la conjetura de Tarski, hay uno de tamaño $\omega_1 + \omega$. Esto es: Si β es el mínimo ordinal límite t.q. $\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} < \aleph_\alpha^{|\beta|}$ para alguna sucesión $(\sigma_\xi)_\xi$ creciente que tiende a α, entonces $\beta = \omega_1 + \omega$.*

Dem: Sean β, α, $(\sigma_\xi)_\xi$ como en el enunciado. En la demostración del Teorema 1 probamos que había un γ t.q.

$$\aleph_\gamma^\kappa > \aleph_\alpha^\omega \geq \aleph_{\gamma+\omega}^\omega, \quad \gamma > \mathrm{cf}\,\gamma = \kappa > \omega \quad \text{y } \forall \delta \leq \gamma\, (\aleph_\delta^\kappa < \aleph_\gamma),$$

donde $\kappa = |\beta| < \kappa + \omega = \beta$.

Nos basta mostrar que $\kappa = \omega_1$.

Por contradicción, supongamos $\kappa > \omega_1$. Entonces

$$\forall \delta < \gamma\, (\operatorname{cf} \delta = \omega_1 < \delta \text{ y } \forall \eta < \delta\, (\aleph_\eta^{\omega_1} < \aleph_\delta) \longrightarrow \aleph_\delta^{\omega_1} \leq \aleph_{\delta+\omega}^{\omega}). \qquad (*)$$

En efecto, si $\delta < \gamma$ es un contraejemplo, $\mathcal{A} = \{\, \aleph_\xi : \xi \leq \omega_1 \text{ o } \delta < \xi < \delta + \omega \,\}$ es un contraejemplo a la conjetura de Tarski:

$$\prod_{\xi \in \mathcal{A}} \aleph_\xi = \prod_{\xi \leq \omega_1} \aleph_\xi \prod_{n \in \omega} \aleph_{\delta+n} = \aleph_{\omega_1}^{\omega_1} \aleph_{\delta+\omega}^{\omega} \leq \aleph_\delta \aleph_{\delta+\omega}^{\omega} = \aleph_{\delta+\omega}^{\omega} < \aleph_\delta^{\omega_1},$$

lo que contradice la minimalidad de β.

Mostremos que $(*) \longrightarrow \aleph_\gamma^\kappa \leq \aleph_{\gamma+\omega}^\omega$, lo que es una contradicción, y concluye la prueba.

Sea $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una sucesión creciente y continua de ordinales límite de cofinalidad $< \kappa$ t.q. $\lim_\alpha \gamma_\alpha = \gamma$, $2^\kappa < \aleph_{\gamma_0}$. y si $\alpha < \kappa$ y $\nu < \gamma_\alpha$, $\aleph_\nu^\kappa < \aleph_{\gamma_\alpha}$.

Tal sucesión existe, cf. la demostración del Corolario 12.b).

Lema 49. *Existe C club en κ t.q. $\forall n \geq 1$*

$$\max \operatorname{pcf}\{\, \aleph_{\gamma_\alpha+n} : \alpha \in C \,\} \leq \aleph_{\gamma+n}.$$

Dem: Basta hallar para cada n un club C_n así. Tomemos entonces $n \geq 1$, y sea $\mathfrak{a}_n = \{\, \aleph_{\gamma_\alpha+n} : \alpha < \kappa \,\}$. O bien $\max \operatorname{pcf} \mathfrak{a}_n \leq \aleph_{\gamma+n}$, y tenemos lo querido, o podemos tomar λ el mínimo de $\operatorname{pcf}(\mathfrak{a}_n) \setminus (\aleph_{\gamma+n} + 1)$.

Sea $\{\mathfrak{b}_\nu\}_{\nu \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}_n}$ una familia de generadores, y definamos $\{\, S_\nu \subseteq \kappa : \nu \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}_n \,\}$ por $\mathfrak{b}_\nu = \{\, \aleph_{\gamma_\alpha+n} : \alpha \in S_\nu \,\}$. Basta mostrar que $S_{\aleph_{\gamma+1}} \cup \cdots \cup S_{\aleph_{\gamma+n}}$ contiene un club ($\aleph_{\gamma+1}, \ldots, \aleph_{\gamma+n} \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}_n$ por el Teorema 40).

Por contradicción, supongamos que $S = \kappa \setminus \bigcup_1^n S_{\aleph_{\gamma+i}}$ es estacionario. Sea $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda} \in {}^\lambda \prod \mathfrak{a}_n$ $<_{J_{<\lambda}}$-creciente (recuérdese que $(J_{<\lambda}$ es λ-dirigido). Como los $\mathfrak{b}_\nu$, $\nu < \aleph_\gamma$, son acotados (si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}_n$ que extiende el filtro de los conjuntos de complemento acotado, $\operatorname{cf}(\prod \mathfrak{a}_n/\mathcal{D}) \geq \aleph_\gamma$) podemos hallar una sucesión $(g_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de funciones sobre S t.q. si $\alpha < \beta < \lambda$, $g_\alpha(\delta) < \aleph_{\gamma_\delta+n}\, \forall \delta \in S$, y $g_\alpha(\delta) < g_\beta(\delta)$ para todo $\delta \in S$ suficientemente grande. Como $\aleph_\gamma$ es κ-inaccesible, esto contradice el Lema 23. $\square_{(\mathrm{L49})}$

Para mostrar que $\aleph_\gamma^\kappa \leq \aleph_{\gamma+\omega}^\omega$, basta probar que si $\aleph_\gamma < \lambda \leq \aleph_\gamma^\kappa$, λ regular, entonces $\lambda \leq \aleph_{\gamma+\omega}^\omega$.

Sea C como en el lema, y definamos $S = \{\, \alpha \in C : \operatorname{cf} \gamma_\alpha = \omega_1 \,\}$. S es estacionario en κ —acá usamos $\kappa > \omega_1$—. Sea λ como en el párrafo anterior.

Lema 50. *Existen regulares $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in S}$ t.q. si $\alpha \in S$, $\aleph_{\gamma_\alpha} < \lambda_\alpha \leq \aleph_{\gamma_\alpha}^{\omega_1}$, y un ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre S t.q. si $\operatorname{cf}(\prod_{\alpha \in S} \lambda_\alpha/\mathcal{D}) = \lambda$.*

Dem: La demostración es similar a la del Teorema 40, y también guarda analogía con las mostradas en la sección 1 del capítulo pasado. Sea NS_S el ideal de los no estacionarios sobre S. Sea $\mathcal{A}$ una colección de λ conjuntos cofinales de $\aleph_\gamma$, de tamaño κ. Si $X \in \mathcal{A}$, sea

$F_X \in \prod_{\alpha \in S}[\aleph_{\gamma_\alpha}]^{\leq\kappa}$ la función $\alpha \mapsto X \cap \aleph_{\gamma_\alpha}$. $\{ F_X : X \in \mathcal{A} \}$ es una familia de funciones eventualmente diferentes.

Como cada $\aleph_{\gamma_\alpha}$ es κ-inaccesible, el Lema 2 implica que si $\alpha \in S$, $\aleph_{\gamma_\alpha}^\kappa = \aleph_{\gamma_\alpha}^{\omega_1}$. Así, hay al menos λ funciones NS_S-distintas.

NS_S es ω_1-completo, así que $<_{\mathrm{NS}_S}$ es bien fundamentado. Sea g $<_{\mathrm{NS}_S}$-minimal respecto a tener λ funciones NS_S-distintas menores, y satisfacer $g(\alpha) \leq \aleph_{\gamma_\alpha}^{\omega_1}$ $(\alpha \in S)$. Sea I el ideal generado por NS_S y los estacionarios X de S t.q. g no es $<_{\mathrm{NS}_S}^X$-minimal (estamos extendiendo la notación en la forma obvia, basándonos en la introducida en la demostración del Lema 24.e)).

Afirmación. *I es normal y κ-completo.*

Dem: Dada $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in {}^\kappa I$, si $\alpha < \kappa$ sean $g_\alpha < g$ sobre X_α y $(h_\beta^\alpha)_\beta$ testigos de que $X_\alpha \in I$. Si, p. ej., $X = \triangle_\alpha X_\alpha$, definiendo $\bar{g}(\delta) = g_\alpha(\delta)$, $\bar{h}_\beta(\delta) = h_\beta^\alpha(\delta)$, donde $\alpha < \delta$ se escogió sujeto a $\delta \in X_\alpha$, $\bar{g}$, $(\bar{h}_\beta)_\beta$ son testigos de que $X \in I$ —por Fodor, omitimos los detalles—. $\Box_{(\mathrm{Af})}$

Sea $\{h_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ una de las familias de funciones cuya existencia garantiza la escogencia de g.

Afirmación. *Si $h <_I g$ $\exists \xi_0 < \lambda \forall \xi > \xi_0$ $(h <_I h_\xi)$.*

Dem: De lo contrario, como $2^\kappa < \lambda$, hay un conjunto X no en I t.q. $h \restriction_X \geq h_\xi \restriction_X$ puntualmente, para λ valores de ξ. Esto contradice la definición de I. $\Box_{(\mathrm{Af})}$

Por la afirmación, s.p.d.g. $\{h_\xi\}_\xi$ es $<_I$-creciente y cofinal en $\dot{\prod}_{\alpha \in S} g(\alpha)/I$.

Sea $\lambda_\alpha = \mathrm{cf}\, g(\alpha)$, $\alpha \in S$. $\mathrm{tcf}(\dot{\prod}_{\alpha \in S}\lambda_\alpha, <_I) = \lambda$, de modo que, como I es normal, un sencillo argumento, usando Fodor, muestra que $\lambda_\alpha > \aleph_{\gamma_\alpha}$ I-c.s.

Escogiendo $\mathcal{D}$ un ultrafiltro disyunto de I, $\mathrm{cf}(\dot{\prod}_{\alpha \in S}\lambda_\alpha/\mathcal{D}) = \lambda$. $\Box_{(\mathrm{L50})}$

Sea $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in S}$ como en el lema. Por $(*)$ $\lambda_\alpha \leq \aleph_{\gamma_\alpha}^{\aleph_1} \leq \aleph_{\gamma_\alpha+\omega}^\omega$.

Por el Teorema 42 (en la sección 3), como $\forall \alpha \in S\,(\aleph_{\gamma_\alpha}^\omega < \aleph_{\gamma_\alpha+\omega})$ podemos tomar ultrafiltros $\mathcal{U}_\alpha$ sobre ω t.q.

$$\mathrm{cf}(\dot{\prod}_{1<n \in \omega} \aleph_{\gamma_\alpha+n}/\mathcal{U}_\alpha) = \lambda_\alpha.$$

Promediando los $\mathcal{U}_\alpha$ con el $\mathcal{D}$ del Lema 50, como en la demostración del Teorema 37.b), tenemos un ultrafiltro $\mathcal{D}^*$ t.q. si $\mathfrak{a} = \{ \aleph_{\gamma_\alpha+n} : \alpha \in S, n > 1 \}$,

$$\mathrm{cf}(\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}^*) = \lambda.$$

Entonces $\lambda \in \mathrm{pcf}\, \mathfrak{a}$, y para terminar basta ver que $\max \mathrm{pcf}\, \mathfrak{a} \leq \aleph_{\gamma+\omega}^\omega$.

Sea $\mathfrak{a}_n$, $1 \leq n$, como en el Lema 49; $\mathfrak{a} = \bigcup_n \mathfrak{a}_n$ y como $2^{|\mathfrak{a}|} = 2^\kappa < \min \mathfrak{a}$,

$$\max \mathrm{pcf}\, \mathfrak{a} = \max \mathrm{pcf}\big(\bigcup_{n \geq 1} s(\mathrm{pcf}\, \mathfrak{a}_n)\big),$$

donde $s(\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_n)$, para $n \geq 1$, es un soporte de $\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_n) = \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_n$, como en el Teorema 38.d). Sea $E = \bigcup_n s(\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_n)$. Por el Lema 49, $\max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_n \leq \aleph_{\gamma+n}$, $E \in [\aleph_{\gamma+\omega}]^{\leq\omega}$. Entonces $\max\mathrm{pcf}\,E \leq \aleph^{\omega}_{\gamma+\omega}$, y la prueba está completa. $\square_{(\mathrm{T41})}$

Jech y Shelah comentan que es consistente que la conjetura falla, y dan como ejemplo un modelo del tipo de los construidos en [Ma1]. De lo mostrado en el teorema, se ve que basta hallar un cardinal $\aleph_\gamma$ tal que $\aleph^{\omega_1}_{\omega_1}\aleph^{\omega}_{\gamma+\omega} < \aleph^{\omega_1}_{\gamma}$, y esta condición se verifica ahí facilmente.

3. $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^\omega)^+}$.

En esta sección presentamos las cotas para $\beth(\aleph_\delta)$ que Shelah obtuvo con δ límite, en [Sh3] cap. XIII. Estas cotas incluyen (y mejoran) las halladas en el Corolario 11.c) y d).

Teorema 42.

a) *Sea* $\mathfrak{a}$ *un intervalo de regulares sin elemento maximal:* $\mathfrak{a} = [\min\mathfrak{a}, \mathrm{Sup}\,\mathfrak{a})$ $(|\mathfrak{a}|^+ < \min\mathfrak{a})$. *Si* $(\min\mathfrak{a})^{|\mathfrak{a}|} < \mathrm{Sup}\,\mathfrak{a}$, $\max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a} = \left|\prod\mathfrak{a}\right|$.

b) *Si* δ *es límite,* $\beth(\aleph_\delta) < \aleph_{(|\delta|^{\mathrm{cf}\,\delta})^+}$. *De hecho, si* $\delta = \alpha+\beta$, $\beta \neq 0$, $\aleph^{\mathrm{cf}\,\delta}_{\delta} < \aleph_{\alpha+(|\beta|^{\mathrm{cf}\,\beta})^+}$.

Corolario 19.

a) $\aleph^{|\delta|}_{\delta} < \aleph_{(2^{|\delta|})^+}$ *para* δ *límite.*

b) *Si* $\mathfrak{a}$ *es como en el teorema,* $|\prod\mathfrak{a}|$ *es regular. En particular,* $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ *implica que* $\aleph^{\aleph_0}_{\omega}$ *es regular.*

c) *Si* $\alpha < (2^{\aleph_0})^+$ *entonces* $\aleph^{\aleph_0}_{\alpha} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ *('$\aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ es* ω*-inaccesible').*

Dem: b) y c) son inmediatos. Para a), nótese que si $2^{|\delta|} > \aleph_\delta$ no hay nada que probar. De lo contrario, tome en a) del teorema $\mathfrak{a} = [(2^{|\delta|})^+, \aleph_\delta)$. $\square_{(\mathrm{C19})}$

La parte b) del corolario mejora un resultado que habíamos obtenido en la página 3 con argumentos elementales, y la parte b) del teorema mejora —como habíamos prometido— c) y d) del Corolario 11. Antes de su aparición, este teorema era completamente inesperado.

Dem: (Teorema 42) a) S.p.d.g. $2^{|\mathfrak{a}|} < \min\mathfrak{a}$: En efecto, si tenemos el teorema bajo esta hipótesis, sean $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap \left[\omega_1, (\min\mathfrak{a})^{|\mathfrak{a}|}\right]$ y $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}_0$. $\left|\prod\mathfrak{a}_0\right| \leq (\min\mathfrak{a}^{|\mathfrak{a}|})^{|\mathfrak{a}|} < \min\mathfrak{a}_1$, así que $\left|\prod\mathfrak{a}\right| = \left|\prod\mathfrak{a}_0\right| \cdot \left|\prod\mathfrak{a}_1\right| = \left|\prod\mathfrak{a}_1\right|$. Además, $2^{|\mathfrak{a}_1|} \leq 2^{|\mathfrak{a}|} \leq (\min\mathfrak{a})^{|\mathfrak{a}|} < \min\mathfrak{a}_1$, y $(\min\mathfrak{a}_1)^{|\mathfrak{a}_1|} = \min\mathfrak{a}_1 \cdot (\min\mathfrak{a}^{|\mathfrak{a}|}_0)^{|\mathfrak{a}_1|} = \min\mathfrak{a}_1$. Pero $\min\mathfrak{a}_1 < \mathrm{Sup}\,\mathfrak{a}_1$, así que el caso que suponemos del teorema es aplicable, y $\left|\prod\mathfrak{a}_1\right| = \max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_1$.

Pero $\max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a} \leq \left|\prod\mathfrak{a}\right| = \left|\prod\mathfrak{a}_1\right| = \max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}_1 \leq \max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$, y tenemos lo querido.

Sea $\kappa = \max\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$. $\kappa \leq \left|\prod\mathfrak{a}\right|$. Falta mostrar la desigualdad opuesta.

Sea θ suficientemente grande, tomemos $<^*_\theta$ un buen orden de H_θ, y consideremos, como antes, la estructura $\langle H_\theta, \in, <^*_\theta\rangle$. Diremos que $N \prec H_\theta$ es *agradable* sii $|N| = \min\mathfrak{a}$, $N = \bigcup_{\alpha<|\mathfrak{a}|^+} N_\alpha$ con $(N_\alpha)_\alpha$ una cadena elemental continua t.q. $\forall\beta < |\mathfrak{a}|^+\,(N_\alpha)_{\alpha<\beta} \in N$, $\mathfrak{a} \in N$ y $\min\mathfrak{a} \subseteq N$. Bajo estas hipótesis, $\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a} \in N$ (por elementaridad, ya que $\mathfrak{a} \in N$) y $\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a} \subseteq N$, esto último pues, como $\min\mathfrak{a} > 2^{|\mathfrak{a}|}$, $2^{|\mathfrak{a}|} \in N$ y, como $|\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}| \leq 2^{|\mathfrak{a}|}$, en N hay una prueba de esto. Éste es el único lugar donde usamos $2^{|\mathfrak{a}|} < \min\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}}$ es la $<^*_\theta$-menor sucesión de generadores, $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_\lambda, J_{<\lambda} \in N\,\forall\lambda \in \mathrm{pcf}\,\mathfrak{a}$. S.p.d.g. $\mathfrak{b}_\kappa = \mathfrak{a}$ y, fijo un $x \in H_\theta$, podemos suponer $x \in N$.

La demostración consiste en mostrar que $|\{ N \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a} : N \text{ es agradable} \}| \leq \kappa$: Supongamos que la desigualdad es válida. Si $f \in \prod \mathfrak{a}$, sea N_f agradable con $f \in N_f$. Entonces $f \subseteq N_f \cap (a \times \operatorname{Sup} \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \times (N_f \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a})$. Pero, por nuestra suposición, sólo hay κ posibilidades para esta intersección. f es una función, así que $f \in {}^{\mathfrak{a}}(N_f \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a})$, de modo que hay a lo más $|N_f \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a}|^{|\mathfrak{a}|} \leq |N_f|^{|\mathfrak{a}|} = \text{mín}\, \mathfrak{a}^{|\mathfrak{a}|} < \operatorname{Sup} \mathfrak{a} \leq \kappa$ funciones f t.q. $f \in M$ para algún M agradable con $M \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a} = N_f \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a}$. Entonces $\left|\prod \mathfrak{a}\right| \leq \kappa \times \kappa = \kappa$, y terminamos.

De modo que sólo nos resta probar la desigualdad. Sea $\chi_N(\rho) = \operatorname{Sup}(N \cap \rho)$ para $\rho \in \mathfrak{a}$. Aunque la usaremos sobre todo para N agradable, χ_N tiene sentido en general. χ_N es una especie de 'función característica', como establece el siguiente lema:

Lema 51. *$N \cap \operatorname{Sup} \mathfrak{a}$ está determinado por χ_N, si N es agradable.*

Dem: Por inducción en $\rho \in [\text{mín}\, \mathfrak{a}, \operatorname{Sup} \mathfrak{a}]$, mostremos que $N \cap \rho$ está determinado por χ_N.

Si $\rho = \text{mín}\, \mathfrak{a}$, $N \cap \rho = \rho$, por hipótesis, y $N \cap \rho = \bigcup_{\rho' < \rho} N \cap \rho'$ si ρ es límite, así que podemos asumir que $\rho < \operatorname{Sup} \mathfrak{a}$ y χ_N determina $N \cap \rho$, y probarlo para $N \cap \rho^+$.

$\rho^+ \in \mathfrak{a} \subseteq N$, porque $\mathfrak{a}$ ès un intervalo. Si $\alpha < |\mathfrak{a}|^+$, como N_α, como en la definición de agradable, está en N, $\operatorname{Sup}(N_\alpha \cap \rho') \in N$. Entonces $E_N = \{ \operatorname{Sup}(N_\alpha \cap \rho^+) : \alpha < |\mathfrak{a}|^+ \} \subseteq N \cap \rho^+$ E_N es club en $\chi_N(\rho^+)$, porque $(N_\alpha)_\alpha$ es continua y tiende a N.

Si N' es agradable y $\chi_{N'} = \chi_N$, $N' \cap \rho = N \cap \rho$, $\operatorname{Sup}(N' \cap \rho^+) = \operatorname{Sup}(N \cap \rho^+)$ y $E_N \cap E_{N'}$ es club en $\chi_N(\rho^+) = \chi_{N'}(\rho^+) \subseteq N \cap N'$. Entonces $N \cap N' \cap \rho^+$ es cofinal en $N \cap \rho^+$ y $N' \cap \rho^+$.

Sea $\alpha \geq \rho$ con $\alpha \in N \cap N' \cap \rho^+$. La $<^*_\theta$-menor biyección $f : \rho \to \alpha$ está en $N \cap N'$, así que $N \cap \alpha = f``(N \cap \rho) = f``(N' \cap \rho) = N' \cap \alpha$. Entonces $N \cap \rho^+ = N' \cap \rho^+$, tomando la unión sobre α. $\square_{(\text{L51})}$

Por el lema, sólo tenemos que mostrar que $|\{ \chi_N : N \text{ es agradable} \}| \leq \kappa$.

Recuérdese que $\operatorname{tcf}\left(\prod \mathfrak{b}_\lambda / J_{<\lambda}(\mathfrak{a})\right) = \lambda$ (corolario 18.c)). Sea $(f^\lambda_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una sucesión de elementos de $\prod \mathfrak{a}$ t.q. su restricción a $\prod \mathfrak{b}_\lambda$ es $<_{J_{<\lambda}}$-creciente y cofinal. S.p.d.g., $f^\lambda_\alpha(\beta) = \text{mín}\{ \operatorname{Sup}\{ f^\lambda_\gamma(\beta) : \gamma \in C \} : C \text{ es club en } \alpha \}$ para todo α límite de cofinalidad $|\mathfrak{a}|^+$, y (tomando la $<^*_\theta$-menor) $(f^\lambda_\alpha)_{\alpha<\lambda} \in N$ si N es agradable. Nótese que si $\operatorname{cf}(\alpha) = |\mathfrak{a}|^+$ y C_β es un club que realiza el mínimo en la definición de $f^\lambda_\alpha(\beta)$, $\bigcap_{\beta \in \mathfrak{a}} C_\beta = C^\lambda_\alpha$ es un club que lo realiza a la vez $\forall \beta \in \mathfrak{a}$.

Lema 52. *Si N es agradable, entonces $f^\lambda_\rho \leq \chi_N$ (puntualmente) y $\chi_N \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda} =_{J_{<\lambda}} f^\lambda_\rho \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda}$ $\forall \lambda \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$, donde $\rho = \chi_N(\lambda)$.*

Dem: Como λ es un cardinal, ρ es un ordinal límite; $\operatorname{cf} \rho = |\mathfrak{a}|^+$ y hay un club en $\rho \subseteq N \cap \rho$, como en la demostración del Lema 51. Entonces no hay pérdida de generalidad en suponer $C^\lambda_\rho \subseteq N$. Por tanto, si $\beta \in C^\lambda_\rho$, $f^\lambda_\beta(\gamma) \in N \cap \gamma$, y $f^\lambda_\rho(\gamma)$ es el supremo de un subconjunto de $N \cap \gamma$, de modo que $f^\lambda_\rho(\gamma) \leq \operatorname{Sup}(N \cap \gamma) = \chi_N(\gamma) \forall \gamma \in \mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{c} = \{ \beta \in \mathfrak{b}_\lambda : f^\lambda_\rho(\beta) < \chi_N(\beta) \}$. Basta mostrar que $\mathfrak{c} \in J_{<\lambda}$. Por definición de χ_N, si $\beta \in \mathfrak{c}$ hay un $\gamma_\beta \in N \cap \beta$ con $f^\lambda_\rho(\beta) < \gamma_\beta$. Pero $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$. Si $(N_\alpha)_{\alpha<|\mathfrak{a}|^+}$ es como en la definición de agradable, hay un $\alpha < |\mathfrak{a}|^+$ con $\{ \gamma_\beta : \beta \in \mathfrak{c} \} \subseteq N_\alpha$. Entonces, si $\beta \in \mathfrak{c}$, $\gamma_\beta < \chi_{N_\alpha}(\beta)$. Por tanto, $\beta \in \mathfrak{c} \longrightarrow \chi_{N_\alpha}(\beta) > f^\lambda_\rho(\beta)$.

$\chi_{N_\alpha} \in N$, así que por elementaridad hay un $\gamma \in N \cap \lambda$ t.q. $\chi_{N_\alpha} \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda} <_{J_{<\lambda}} f_\gamma^\lambda \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda}$. $\gamma < \rho$, de modo que

$$\chi_{N_\alpha} \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda} <_{J_{<\lambda}} f_\rho^\lambda \restriction_{\mathfrak{b}_\lambda} .$$

Entonces $\mathfrak{c} \subseteq \{\beta \in \mathfrak{b}_\lambda : \chi_{N_\alpha}(\beta) \geq f_\rho^\lambda(\beta)\} \in J_{<\lambda}$. $\square_{(\mathrm{L52})}$

Sea N agradable. Usando el lema podemos definir, por inducción, una sucesión

$$((\rho_m, \lambda_m, A_m) : m \leq n)$$

para algún $n < \omega$, que satisface:

i) $\kappa = \lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_n$.
ii) $\forall m \leq n\, (\lambda_m \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}, \rho_m = \operatorname{Sup}(N \cap \lambda_m))$.
iii) $\forall m \leq n\, (A_m \subseteq \mathfrak{a})$.
iv) $A_n = \emptyset$, $A_0 = \{\beta \in \mathfrak{a} : f_{\rho_0}^{\lambda_0}(\beta) < \chi_N(\beta)\}$,
v) $A_m \in J_{<\lambda_{m+1}^+} \setminus J_{<\lambda_{m+1}}$ si $m < n$.
vi) $A_{m+1} = \{\beta \in A_m : f_{\rho_{m+1}}^{\lambda_{m+1}}(\beta) < \chi_N(\beta)\}$ si $m < n$.

En efecto: $A_0 \in J_{<\lambda}$, por el lema. Si $A_0 = \emptyset$, $n = 0$. En otro caso, por continuidad de $(J_{<\lambda})_\lambda$, el menor τ t.q. $A_0 \in J_{<\tau}$ es sucesor, $\tau = \lambda_1^+$. Las cláusulas ii) y vi) muestran cómo definir A_1, ρ_1, y el mismo argumento permite continuar la construcción mientras $A_m \neq \emptyset$. Pero $(\lambda_m)_m$ es decreciente, así que es finita.

Esta sucesión caracteriza χ_N, pues $\chi_N \restriction_{\mathfrak{a}\setminus A_0} = f_{\rho_0}^{\lambda_0} \restriction_{\mathfrak{a}\setminus A_0}$ y

$$\chi_N \restriction_{A_m \setminus A_{m+1}} = f_{\rho_{m+1}}^{\lambda_{m+1}} \restriction_{A_m \setminus A_{m+1}}$$

para $m < n$.

Entonces $|\{\chi_N : N \text{ es agradable}\}| \leq \left|[\{f_\rho^\lambda : \rho < \lambda \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}\}]^{<\omega}\right|$, porque los $f_{\rho_m}^{\lambda_m}$, $m \leq n$, determinan χ_N. Pero el conjunto a la derecha tiene cardinal $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}|\,|\operatorname{máx} \operatorname{pcf} \mathfrak{a}| = \kappa$. Esto completa la prueba de a).

b) La demostración de la segunda parte del enunciado es similar a la de la primera. Damos la idea: Como antes, podemos suponer $2^{\operatorname{cf} \delta} < \aleph_\delta$. El argumento es similar (ver [Sh3] cap. XIII o [BuMa] por detalles). Sea $\mathfrak{a} = (2^{\operatorname{cf} \delta}, \aleph_\delta)$. Recuérdese que $\operatorname{tcf}(\prod \mathfrak{b}) = \operatorname{máx} \operatorname{pcf} \mathfrak{b}$ para $\mathfrak{b}$ que satisfaga las hipótesis del Teorema 37. Si $\mathcal{J} = [\mathfrak{a}]^{\leq \operatorname{cf} \delta} \setminus \{\emptyset\}$, $|\mathcal{J}| \leq |\delta|^{\operatorname{cf} \delta}$ y, si $A \in \mathcal{J}$ y λ es infinito, $A \in J_{<\lambda} \leftrightarrow \operatorname{cf}(\prod A) < \lambda$. Sea $\mu = \operatorname{cf} \delta$. Por el Teorema 39.b), o mejor 40.c), $\operatorname{PP}(\aleph_\delta)$ es un intervalo de regulares, y de hecho también $\operatorname{pcf}_\mu(\mathfrak{a}) = \{\operatorname{cf}(\prod A/\mathcal{D}) : A \in \mathcal{J}, \mathcal{D} \text{ ultrafiltro sobre } A\}$ —la posible diferencia entre $\operatorname{PP}(\aleph_\delta)$ y $\operatorname{pcf}_\mu(\mathfrak{a})$ está en que $\operatorname{mín} \operatorname{pcf}_\mu(\mathfrak{a}) = (2^\mu)^+$, mientras que $\operatorname{mín} \operatorname{PP}(\aleph_\delta) = \aleph_\delta^+$—. $|\operatorname{pcf}_\mu(\mathfrak{a})| \leq |\delta|^\mu$, de modo que si κ es el mínimo regular t.q. $[\mathfrak{a}]^{\leq\mu} \subseteq J_{<\kappa}$, $\aleph_\delta < \kappa < \aleph_{(|\delta|^\mu)^+}$. Un ligero cambio en la definición de $\mathfrak{a}$ (o $\mathcal{J}$) muestra el resultado de la segunda parte del enunciado, pues ahora tendríamos $|\operatorname{pcf}_\mu(\mathfrak{a})| \leq \alpha + |\beta|^\mu$ si $\delta = \alpha + \beta$ con $\beta \neq 0$; lo único que falta es acotar $\aleph_\delta^\mu$ en términos de κ: $\aleph_\delta^\mu \leq \kappa |\delta|^\mu$.

Para probar esto, se procede por contradicción. De $\aleph_\delta^\mu > |\delta|^\mu$ se sigue que $|\delta|^\mu < \aleph_\delta$. Se escogen una sucesión $(S_\alpha)_\alpha \in {}^\kappa[\aleph_\delta]^\mu$, y un conjunto cofinal F_A es $\prod A$ de tamaño $< \kappa$ para cada $A \in \mathcal{J}$. $|F_A| < \kappa < \aleph_{(|\delta|^\mu)^+}$, de modo que si $\lambda = (|\delta|^\mu)^{++}$ $\lambda^\mu = \lambda < \aleph_\delta$ y $|F_A| < \aleph_\lambda$.

Como λ es regular, puede construirse una colección $P(F_A, \lambda) \subseteq [F_A]^\lambda$, $|P(F_A, \lambda)| \leq |F_A|$, t.q. si $t \in [F_A]^\lambda$ hay un $s \in P(F_A, \lambda)$ con $|s \cap t| = \lambda$.

Se construye también una colección de modelos M^α_η de tamaño μ (subestructuras de H_χ para χ grande), donde $\alpha \in \kappa$ y $\eta \in {}^{<\mu}\lambda$ es estríctamente creciente. La colección es continua en el sentido de que si $\operatorname{Sup}\operatorname{Ran}\eta$ es límite, $M^\alpha_\eta = \bigcup_{\beta<\operatorname{Dom}\eta} M^\alpha_{\eta\restriction\beta}$, y t.q. $\{\mathfrak{a}, \lambda\} \cup S_\alpha \subseteq M^\alpha_\emptyset$, $\operatorname{Ran}\eta \subseteq M^\alpha_\eta$.

Una subcolección de estos modelos hace el papel de los N de la parte anterior. Con esta subcoleción puede definirse una familia de funciones f^α_β, con $\beta < \operatorname{Sup}\operatorname{Ran}\eta$, y otra familia $f^\alpha_{\beta,A}$, con $A \in \{B \in \mathcal{J} : B \cap \lambda = \emptyset\} = \mathcal{J}_\lambda$. La subcolección y las 2 familias de funciones cumplen una serie de restricciones que no vamos a mencionar. Con ayuda de las $f^\alpha_{\beta,A}$ se escogen también elementos de $P(F_A, \lambda)$.

La prueba se divide en 2 casos, según $\mu > \aleph_0$ o $\mu = \aleph_0$. En el primero se muestra que las f^α_β son ahora las funciones características: $f^\alpha_\beta(\rho) = \operatorname{Sup}(M^\alpha_\beta \cap \rho)$, al menos para cierto β y una familia suficientemente amplia de valores de ρ. Gracias a esto se muestra que, para un $I \in [\kappa]^\kappa$, definido por medio de los $f^\alpha_{\beta,A}$, si $\gamma \in I$, $M^\gamma_\eta \cap \aleph_\delta$ no depende de γ. Esto permite hacer un conteo:

Si $S = M^\gamma_\eta \cap \aleph_\delta$, $\bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha \subseteq S$. Entonces $|S| \geq |S_\alpha| = \kappa$ para $\alpha \in I$, pero $|\mathcal{P}(S)| \leq 2^\mu$. Como $|\delta|^\mu < \aleph_\delta$, $2^\mu < \aleph_\delta < \kappa$, y tenemos la contradicción.

El caso $\mu = \aleph_0$ es más intrincado. En el anterior se había tomado un β que permitió usar las funciones f^α_β como características. Ese β, ahora, tiene cofinalidad $(|\delta|^{\aleph_0})^+$. Esto permite construir un árbol sobre ${}^{<\omega}\beta$ y definir ω elementos de $\mathcal{J}_\lambda$ asociados, $(A_n)_n$, todos contables, gracias a un teorema combinatorio mostrado por Shelah en otro contexto (generalizaciones del lema del sistema Δ a árboles). La demostración procede como antes. Se considera un $N \prec H_\chi$ de tamaño λ, de modo que $|[N]^\mu| = \lambda^\mu = \lambda < \kappa = |I|$. Para obtener una contradicción, N se toma de modo que $S_\alpha \subseteq N \,\forall\alpha \in I$. Esto se consigue tomando $A = \bigcup_n A_n \subseteq N$ y verificando que, por las propiedades de los A_i, si $\rho \in A$ y $\alpha \in I$, $M^\alpha_\eta \cap N \cap \rho$ es cofinal en $M^\alpha_\eta \cap \rho$ para cierto η. Pero, así como antes $M^\gamma_\eta \cap \aleph_\delta$ no dependía de γ, ahora puede mostrarse que $M^\alpha_\eta \cap \rho \subseteq N \cap \rho$. Esto produce la contradicción: $S_\alpha \subseteq M^\alpha_\emptyset \subseteq M^\alpha_\eta \subseteq N$. $\square_{(\mathrm{T42})}$

4. Cotas que no Dependen de la Exponencial.

El objeto de esta sección es discutir el resultado principal de [Sh8] cap. IX.

Teorema 43.

a) *Si δ es límite, $\delta < \aleph_{\alpha+\delta}$, entonces* $\operatorname{pp}(\aleph_{\alpha+\delta}) < \aleph_{\alpha+|\delta|^{+4}}$. *Por ejemplo,* $\operatorname{pp}(\aleph_\omega) < \aleph_{\omega_4}$. *Si $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, esto implica $\aleph_\omega^\omega < \aleph_{\omega_4}$.*

b) *Vale más: Si ζ es límite, $\zeta < \aleph_\xi$, $\lambda = \aleph_{\xi+\zeta}$, $\operatorname{cf}\zeta <\leq \operatorname{cf}\kappa = \kappa \leq |\zeta|^+$ y $\operatorname{pp}(\lambda) = \aleph_{\xi+\gamma}$, entonces $\gamma < \kappa^{+3}$.*

Ahora bien: $\operatorname{pcf}\{\aleph_n : n > 1\} = \{\kappa : \omega_1 < \kappa \leq \aleph_\omega^\omega \text{ y } \kappa \text{ es regular}\} = \{\aleph_{\alpha+1} : 0 < \alpha \text{ y } \aleph_{\alpha+1} \leq \operatorname{pp}(\aleph_\omega)\}$, y la relación análoga vale para otros intervalos, así que el teorema a probar podría verse como: Si $|\mathfrak{a}| < \min\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ es un intervalo de regulares, entonces $|\operatorname{pcf}\mathfrak{a}| \leq |\mathfrak{a}|^{+3}$. De nuevo, aparece relevante la pregunta 4.

La demostración utiliza una estructura topológica inducida naturalmente por la operación pcf. Comencemos entonces estableciendo unos resultados generales al respecto. No todos serán necesarios en lo que sigue.

Def. 47. [Kuratowski] Un *operador de clausura* sobre un conjunto X es una función

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl} : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

que satisface

a) $\bar{\emptyset} = \emptyset$
b) $x \subseteq \bar{x}$
c) $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$
d) $x \subseteq y \longrightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$
e) $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y}$.

para cualesquiera $x, y \subseteq X$.

Es conocido (y fácil de ver) que Cl genera una topología sobre X definiendo $x \subseteq X$ cerrado sii $x = \bar{x}$.

S.p.d.g. (no cambia $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}|$) $2^{|\mathfrak{a}|} < \min \mathfrak{a}$ y $\min \mathfrak{a} = \aleph_{\alpha+1}$ es sucesor. Así, en $\operatorname{pcf} \mathfrak{a}$ no hay debilmente inaccesibles: Si $\lambda = 2^{|\mathfrak{a}|}$, como $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| \leq 2^{|\mathfrak{a}|}$, $\operatorname{pcf} \mathfrak{a} \subseteq \{ \aleph_{\alpha+\beta} : \beta < \lambda^+ \}$ y, si $\beta < \lambda^+$ es límite, $\operatorname{cf}(\aleph_{\alpha+\beta}) = \operatorname{cf} \beta \leq \lambda < \min \mathfrak{a} < \aleph_{\alpha+\beta}$.

Sea $\eta = |\mathfrak{a}|$, $\max \operatorname{pcf} \mathfrak{a} = \aleph_{\alpha+\rho+1}$. En $\mathcal{P}(\rho+1)$ definimos Cl por

$$\bar{x} = \{ \gamma \leq \rho : \aleph_{\alpha+\gamma+1} \in \operatorname{pcf}(\{ \aleph_{\alpha+\mu+1} : \mu \in x \}) \}.$$

Es fácil ver que Cl es un operador de clausura: a), b), d) son obvios. Como $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| < \min \mathfrak{a}$, si $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{a}$, $|\operatorname{pcf} \mathfrak{d}| \leq |\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| < \min \mathfrak{a} \leq \min \mathfrak{d}$, y $\operatorname{pcf}(\operatorname{pcf} \mathfrak{d}) = \operatorname{pcf} \mathfrak{d}$. De aquí c) se deduce facilmente (sólo es necesario expandir la definición de $\bar{\bar{x}}$). e) es porque $\operatorname{pcf}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \operatorname{pcf}(\mathfrak{a}) \cup \operatorname{pcf}(\mathfrak{b})$. La topología generada es compacta por el Teorema 38.a). Los singletons son cerrados, así que es Hausdorff. Por localización, si $\gamma \in \bar{x}$, hay un $x' \subseteq x$, $|x'| \leq \eta$, t.q. $\gamma \in \overline{x'}$. Por ejemplo, si $\mathfrak{a} = \{ \aleph_n : n > 1 \}$, la topología tiene carácter contable. Todo $\bar{x}$ tiene un elemento maximal. Si $\delta \leq \rho$, $\operatorname{cf} \delta > \omega$, hay un club $C \subseteq \delta$ con $C \cup \{\delta\}$ cerrado por el Teorema 40.b). Considerando una familia cerrada de generadores, cf. Teorema 38.b), la topología es totalmente desconectada, y pueden hacerse algunas otras observaciones.

Dem: (Teorema 43) Mostraremos a). 1) Sea λ singular, $\lambda = \aleph_{\alpha'+\beta'}$, $\beta' < \aleph_{\alpha'}$. Comencemos mostrando que $\operatorname{pp} \lambda < \aleph_{(\alpha'+|\beta'|^{+5})}$. En 2), usando forcing, reduciremos el 5 a 4.

Sea $\mathfrak{a} = \{ \aleph_{\alpha'+\beta+1} : \beta < \beta' \}$. S.p.d.g. $|\mathfrak{a}|^+ < \min \mathfrak{a}$ y $\aleph_{\alpha'}$ es regular. Para $\gamma < |\beta'|^{+5}$, sea $\lambda_\gamma = \aleph_{\alpha'+\gamma}$. Así, procediendo por contradicción, $(\lambda_\gamma)_{\gamma \leq |\mathfrak{a}|^{+5}}$ lista los primeros $|\mathfrak{a}|^{+5}$ elementos de $\operatorname{pcf} \mathfrak{a} \cup \{ \mu : \mu \text{ es singular}, \mu = \operatorname{Sup}(\mu \cap \operatorname{pcf} \mathfrak{a}) \}$. Si γ no es límite, λ_γ es regular, y si sí lo es, $\lambda_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \lambda_\delta$ es singular. La sucesión es estríctamente creciente. Por el Teorema 40.b), si $\gamma < |\mathfrak{a}|^+$, $\operatorname{cf} \gamma > \omega$, hay un club C^1_γ de γ con $\operatorname{tcf}(\prod_{\delta \in C^1_\gamma} \lambda_{\delta+1} / J^{\mathrm{bd}}_{C^1_\gamma}) = \lambda_{\gamma+1} = \max \operatorname{pcf}\{ \lambda_{\delta+1} : \delta \in C^1_\gamma \}$.

Necesitamos 2 resultados de combinatoria, que llamaremos **(a)** y **(b)**, y cuya prueba omitimos.

(a) Podemos hallar $(C^2_\gamma)_{\gamma \in S^2}$ t.q.

i) $S^2 \subseteq |\mathfrak{a}|^{+5}$,

ii) $S_1^2 = \{ \delta \in S^2 : \operatorname{cf} \delta = |\mathfrak{a}|^{+3} \}$ es estacionario en $|\mathfrak{a}|^{+5}$,

iii) Si $\gamma \in S^2$, C_γ^2 es un subconjunto cerrado de γ (en la topología del orden), y si γ es límite es no acotado,

iv) Si $\gamma \in S^2$, $C_\gamma^2 \subseteq S^2$,

v) Si $\gamma \in S^2$, el tipo de orden de C_γ^2 es $\leq |\mathfrak{a}|^{+3}$, y

vi) Si $\gamma \in S^2$, $\delta \in C_\gamma^2$; entonces $\delta \in S^2$ y $C_\delta^2 = \delta \cap C_\gamma^2$.

Para γ en S^2 sea h_γ^2 un isomorfismo de orden de $\operatorname{otp}(C_\gamma^2)$ sobre $C_{\gamma+1}^2$, y sea $S^3 = \{ \delta < |\mathfrak{a}|^{+3} : \operatorname{cf} \delta = |\mathfrak{a}|^{+3} \}$.

(b) Podemos hallar $(C_\delta^3)_{\delta \in S^3}$ t.q.

(*) C_δ^3 es club en δ, con tipo de orden $|\mathfrak{a}|^+ = \operatorname{cf} \delta$, si $\alpha \in C_\delta^3$ entonces $\omega \leq \operatorname{cf} \alpha < |\mathfrak{a}|^+$.

(**) Si C es club en $|\mathfrak{a}|^{+3}$, $\{ \delta \in S^3 : C_\delta^3 \subseteq C \}$ es estacionario.

Para $\alpha < |\mathfrak{a}|^{+}3$ sea $\mathcal{P}_\alpha = \{ C_\delta^3 \cap \alpha : \delta \in S^3 \}$, de modo que $|\mathcal{P}_\alpha| \leq |\mathfrak{a}|^{+3}$. Sea C_α^4, para $\alpha \in S^2$ de cofinalidad $|\mathfrak{a}|^+$, la imagen de $C^3_{\operatorname{otp}(C_\alpha^2}$ por h_α^2. Si $\alpha \in S^2$, $\operatorname{cf} \alpha < |\mathfrak{a}|^{+3}$, sea $\mathcal{P}_\alpha^4 = \{ h_\alpha^2 “(C) : C \in \mathcal{P}_{\operatorname{otp}(C_\alpha^2)} \}$.

Entonces

α) $C_\alpha^4 \subseteq \alpha$ es club, $\operatorname{otp}(C_\alpha^4) = |\mathfrak{a}|^+$, $\forall \alpha \in S^2$ con $\operatorname{cf} \alpha = |\mathfrak{a}|^+$.

β) $\forall \delta \in S_1^2$, si $C \subseteq \delta$ es club, $C \cap C_\delta^2$ también, y $\{ \alpha \in C_\delta^2 : \operatorname{cf} \alpha = |\mathfrak{a}|^+ \text{ y } C_\alpha^4 \subseteq C \} \subseteq \delta$ es estacionario.

γ Si $\beta \in C_\alpha^4$, $C_\alpha^4 \cap \beta \in \mathcal{P}_\beta^4$.

δ) $\mathcal{P}_\beta^4$ es una familia de a lo más $|\mathfrak{a}|^{+3}$ clubs de C_β^2.

Para $\alpha \in S^2$, $\operatorname{cf} \alpha < |\mathfrak{a}|^+$, sea $g(\alpha)$ el mínimo β t.q. si $C \in \mathcal{P}_\alpha^4$ y $\operatorname{máx} \operatorname{pcf}\{ \lambda_{\gamma+\beta} : \gamma \in C \} < \lambda_{|\mathfrak{a}|^{+5}}$, entonces $\operatorname{máx} \operatorname{pcf} \mathfrak{a} < \lambda_\beta$.

Como $\operatorname{cf}(\lambda_{|\mathfrak{a}|^{+5}}) = |\mathfrak{a}|^{+5} > |\mathfrak{a}|^{+3} \geq |\mathcal{P}_\alpha^4|$, tenemos que $g(\alpha) < |\mathfrak{a}|^{+5}$, y por tanto

$$E = \{ \alpha < |\mathfrak{a}|^{+5} : \text{Si } \beta < \alpha,\ \beta \in S^2 \text{ y } \operatorname{cf} \beta = |\mathfrak{a}|^+, \text{ entonces } g(\beta) < \alpha \}$$

es club en $|\mathfrak{a}|^{+5}$. Pero por **(a)** ii) $S_1^2 \subseteq |\mathfrak{a}|^{+5}$ es estacionario, así que hay un $\delta' \in S_1^2 \cap E$, con $\delta' \cap E$ club en δ'. Luego, por β)), ya que $C_{\delta'}^1 \subseteq \delta'$ es club,

$$A = \{ \alpha \in C_{\delta'}^2 : \operatorname{cf} \alpha = |\mathfrak{a}|^+ \text{ y } C_\alpha^4 \subseteq E \cap \delta' \cap C_{\delta'}^1 \}$$

es estacionario en δ'. Sea $\gamma' \in A$ pto. de acumulación de A. γ' es punto de acumulación de E y $C_{\gamma'}^4 \subseteq C_{\delta'}^1$. Por definición de $C_{\delta'}^1$,

$$\operatorname{máx} \operatorname{pcf}\{ \lambda_{\alpha+1} : \alpha \in C_{\gamma'}^4 \} \leq \operatorname{máx} \operatorname{pcf}\{ \lambda_{\alpha+1} : \alpha \in C_{\delta'}^1 \} \leq \lambda_{\delta'+1} < \lambda |\mathfrak{a}|^{+5}.$$

Además, $\lambda^* = \operatorname{máx} \operatorname{pcf}\{ \lambda_{\alpha+1} : \alpha \in C_{\gamma'}^4 \} \geq \lambda_{\gamma'}$. Pero $D = \{ \lambda_{\alpha+1} : \alpha \in C_{\gamma'}^4 \} \subseteq \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$, y por localización hay un $\mathfrak{b} \subseteq D$ de tamaño $\leq |\mathfrak{a}|$, con $\lambda^* = \operatorname{máx} \operatorname{pcf} \mathfrak{b}$. Como $\operatorname{otp}(C_\alpha^4) = |\mathfrak{a}|^+$ hay un $\beta \in C_\alpha^4$ con $\mathfrak{b} \subseteq \{ \lambda_{\alpha+1} : \alpha \in C_{\gamma'}^4 \cap \beta \} = D^*$. Nótese que $C_{\gamma'}^4 \cap \beta \in \mathcal{P}_\beta^4$ y

$$\operatorname{máx} \operatorname{pcf} D^* \geq \lambda^*.$$

Esto es una contradicción: $\lambda^* < \lambda_{g(\beta)}$, $\beta < \gamma'$, $\lambda^* \geq \lambda_{\gamma'}$, pero $\gamma' \in E$.

2) S.p.d.g. $2^{|\mathfrak{a}|^{+3}} < \min \mathfrak{a}$. Basta hacer $S^2, S^2_1 \subseteq |\mathfrak{a}|^{+4}$, forzando con segmentos iniciales de tamaño $\leq |\mathfrak{a}|^{+4}$. Nótese que sólo es necesario tratar con $\{ \lambda^+_\alpha : \alpha \in C^1_\gamma \}$ para $\gamma \in S^2_1$ y con $\{ \lambda^+_\alpha : \alpha \in C^4_\gamma \cap \beta \}$ para $\beta \in C^4_\gamma \cup \{\gamma\}$, $\gamma \in S^2$, $\operatorname{cf} \gamma = |\mathfrak{a}|^+$, en la prueba pasada. El forcing no adiciona nuevos conjuntos de estos, así que todo sigue como antes.

Sólo faltó verificar **(a)** y **(b)**. Ambos pueden encontrarse en[Sh8] cap. III. Son generalizaciones de trabajos anteriores de Shelah "adivinando" clubs. Ninguno de los dos requiere de pcf. $|\mathfrak{a}|^{+5}$ aparece porque el argumento requiere de un regular entre el número de clubs obtenido ($|\mathfrak{a}|^{+3}$) y el cardinal sobre el que se construye la sucesión ($|\mathfrak{a}|^{+5}$). $\Box_{(\text{T43})}$

Observaciones. 1) ¿Qué tiene esto que ver con la operación de clausura? Hay otra forma de presentar la prueba: Sea $\operatorname{Cl} x = \bar{x} = \left\{ \alpha < |\mathfrak{a}|^{+5} : \aleph_{\alpha+1} \in \operatorname{pcf}\{ \aleph_{\beta+1} : \beta \in x \} \right\}$. Por contradicción, supongamos $\aleph_{|\mathfrak{a}|^{+5}+1} \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es un intervalo, $\overline{|\mathfrak{a}|} = |\mathfrak{a}|^{+5}$. Requerimos localización y la propiedad de clubs que mencionamos en la demostración y al nombrar las características de la topología generada. *Y no más.* Esas 3 propiedades bastan para producir una contradicción. El problema, claro, es que la contradicción es elaborada.

2) No es necesario el argumento de forcing. Hubiéramos podido excluirlo, construyendo 'a mano' las sucesiones (con ayuda de cadenas de modelos con universos pequeños, para poder controlar los cardinales). Pero los detalles son bastante más elaborados.

Ahora bien: Se necesitaron 2 partes: 1) Producir con la teoría de pcf una estructura (una topología, en este caso), y 2) Mostrar que tal estructura no puede existir.

Teniendo esto como patrón cabe preguntarse si $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}|$ puede probarse, al menos en el caso que nos interesa —$\mathfrak{a}$ un intervalo—, o siquiera $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| \leq |\mathfrak{a}|^{+2}$, siguiendo esta idea. [JSh2] muestra que *no*, al menos no sin cambios considerables, en el caso de $|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}|$. Específicamente, Jech y Shelah consideran $\mathfrak{a} = \{ \aleph_n : n > 1 \}$ y suponen $\aleph_{\omega_1+1} \in \operatorname{pcf} \mathfrak{a}$. Esto produce una estuctura sobre ω_1, en este caso correspondiente a una sucesión $(B_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de conjuntos de ordinales contables t.q. $\max B_\alpha = \alpha$, $\alpha \in B_\beta \to B_\alpha \subseteq B_\beta$ (la analogía con los generadores no es gratuita:

$$B_\alpha = \{ \xi : \aleph_{\xi+1} \in \mathfrak{b}_{\aleph_{\alpha+1}} \}$$

para $(\mathfrak{b}_\gamma)_\gamma$ generadores transitivos), si $\lambda \leq \alpha$ es límite, $B_\alpha \cap \lambda \notin \langle J^{\text{bd}}_\lambda \cup \{B_\beta\}_{\beta<\alpha} \rangle$ y hay una partición de ω_1, $\omega_1 = \bigcup_n A_n$ tal que $|B_\alpha \cap A_n| < \omega \, \forall \alpha, n$ [Por supuesto, el caso tratado es peculiar, pues no pueden usarse los resultados sobre clubs, así que quizás el mismo argumento, en el caso general, o cofinalidad $> \omega$, podría servir].

Pero el objetivo de [JSh2] es mostrar que una estructura así *existe*. La prueba no es constructiva: Se usa forcing para probar su existencia en una extensión de V y, luego, gracias a un teorema anterior de Shelah sobre cierto tipo de nociones de forcing, que incluye la considerada, se muestra que si hay una estructura en la extensión, hay una en V.

5. El Primer Contraejemplo.

Presentamos aquí, muy brevemente, un resultado que fue usado Gitik para establecer la hipótesis de cardinales grandes requerida para Con($\neg$SCH) —ver cap. 3—. Su demostración puede hallarse (de nuevo) en [Sh8] cap. IX, pero si $\lambda < \aleph_\lambda$, se sigue del trabajo en [Sh3] cap. XIII.

Teorema 44. *Sea* λ *el primer cardinal t.q.* $\beth(\lambda) > \lambda^+ + 2^{\operatorname{cf}\lambda}$. *Entonces* $\operatorname{cf}\lambda = \aleph_0$, $\forall\mu < \lambda\,(\mu^{\aleph_0} \leq \mu^+ + 2^{\aleph_0})$ *y* $\operatorname{pp}(\lambda) \geq \lambda^{++}$.

Dem: La parte 'clásica' del teorema es fácil: Si $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} > \lambda^+ + 2^{\operatorname{cf}\lambda}$, λ es singular, incluso $\lambda > 2^{\operatorname{cf}\lambda}$, y $\mu < \lambda \longrightarrow \mu^{\operatorname{cf}\mu} = \mu^+ + 2^{\operatorname{cf}\mu}$. En particular,

$$2^{\aleph_0} < \mu < \lambda \text{ y } \operatorname{cf}\mu = \aleph_0 \longrightarrow \mu^{\aleph_0} = \mu^+.$$

Luego, por inducción en μ, usando el Lema 2,

$$\mu < \lambda \longrightarrow \mu^{\aleph_0} \leq \mu^+ + 2^{\aleph_0} < \lambda.$$

Entonces, si $\mu < \lambda$ y $\operatorname{cf}\mu = \aleph_1$, $\operatorname{pp}\mu = \mu^+$ (esto es difícil, *no* es automático del Teorema 40.a)). $\operatorname{cf}\lambda = \aleph_0$ es el teorema de Silver (Corolario 12.b)), pero Shelah lo deduce sin usarlo: Él continúa: Si $\operatorname{cf}\lambda = \aleph_0$, ya está, usando uno de los cardinales de cubrimiento que —no— mencionamos en la sección 1.*b*. En otro caso, $\operatorname{cf}\lambda > \aleph_0$ y si $\operatorname{cf}\mu \leq \operatorname{cf}\lambda$ y $2^{\operatorname{cf}\lambda} < \mu < \lambda$, entonces $\mu^{\operatorname{cf}\lambda} \leq \mu^+$, por inducción en μ, y por tanto $\mu < \lambda$ implica $\mu^{\operatorname{cf}\lambda} \leq \mu^+ + 2^{\operatorname{cf}\lambda}$, de nuevo por inducción.

Entonces $\operatorname{pp}(\lambda) = \lambda^+$, y esto implica $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \lambda^+$, una contradicción. Omitimos los detalles. $\square_{(T44)}$

Shelah usa en la prueba mostrada 2 resultados. Uno de ellos extiende el Lema 2. El otro mejora algunos de los resultados de Galvin y Hajnal:

Def. 48. $\operatorname{cov}(\lambda,\kappa,\theta,\sigma)$ es el mínimo μ t.q. hay una familia $\mathcal{P}$ de μ subconjuntos de λ, de cardinalidad $< \kappa$, tal que

$$t \subseteq \lambda, |t| < \theta \longrightarrow \exists\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}\,(|\mathcal{P}'| < \sigma \wedge t \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{P}'} A).$$

$\operatorname{cov}(\lambda,\kappa,\theta,\sigma)$ está bien definido si $\lambda \geq \theta \geq \sigma > 1$, $\kappa \geq \omega$ y

$$\kappa \geq \theta \text{ o } (\kappa^+ = \theta \text{ y } \operatorname{cf}\theta < \sigma).$$

Por ejemplo, $\operatorname{cov}(\lambda,\kappa,\theta,\sigma) = 1$ sii $\lambda < \kappa$, y

$$\operatorname{cov}(\lambda,\kappa,\kappa,2) = \operatorname{cf}([\lambda]^{<\kappa},\subseteq).$$

Este último ejemplo es relevante (a la extensión del Lema 2) pues

$$\lambda^\kappa = 2^\kappa + \operatorname{cf}([\lambda]^{\leq\kappa},\subseteq),$$

en palabras de Shelah, "as everyone knows".

La generalización al Lema 2 es el siguiente

Lema 53.

a) *Si* $\lambda \geq \kappa \geq \theta > \sigma$, $\operatorname{cf}\kappa \geq \sigma$ *y* $\operatorname{cf}\theta \geq \sigma$ *o* $2^{<\theta} < \lambda$, *entonces*

$$\lambda^{<\theta} = \operatorname{cov}(\lambda, \kappa, \theta, \sigma)^{<\sigma} + (<\kappa)^{<\theta}.$$

b) *Si* $\omega < \operatorname{cf}\lambda \leq \theta < 2^{\theta} < \lambda$ *y la exponencial no es eventualmente cte. bajo* λ,

$$\lambda^{\theta}(= \lambda^{\operatorname{cf}\lambda}) = \operatorname{cov}(\lambda, \lambda, (\operatorname{cf}\lambda)^{+}, \operatorname{cf}\lambda).$$

Dem: Veamos a). $\leq$ es relativamente fácil, a partir de la definición. Para la otra dirección, $\lambda \geq \kappa$ implica $\lambda^{<\theta} \geq \kappa^{<\theta} \geq (<\kappa)^{<\theta}$, y $\mathcal{P} = [\lambda]^{<\theta}$ muestra que $\lambda^{<\theta} \geq \operatorname{cov}(\lambda, \kappa, \theta, \sigma)$. Basta observar entonces que $(\lambda^{<\theta})^{<\sigma} = \lambda^{<\theta}$. Si $\operatorname{cf}\theta \geq \sigma$ esto es obvio, y también vale si $\exists\theta' < \theta\,(\lambda^{<\theta} = \lambda^{\theta'})$, pero esto ocurre si $2^{<\theta} < \lambda$. La demostración de esto último *no* es elemental, y aparece en [Sh6] como parte de un resultado sobre cardinales asociados a álgebras booleanas. Hajnal, independientemente, también había dado una prueba. $\square_{(\text{L53})}$

Ver también [Sh3] cap. XIV.

La relación con el teorema está en que

1) $\operatorname{cov}(\lambda, \kappa, \theta, \sigma) + \lambda = \operatorname{Sup}\{\operatorname{pp}_{\Gamma}(\lambda^{*}) : \lambda^{*} \in [\kappa, \lambda], \sigma \leq \operatorname{cf}\lambda^{*} < \theta\}$ cuando $\lambda \geq \kappa \geq \theta > \sigma = \operatorname{cf}\sigma > \omega$ y
2) (p. ej.) $\operatorname{pp}_{\kappa}(\lambda) = \operatorname{cov}(\lambda, \lambda, \kappa^{+}, 2)$ cuando $\kappa \in [\operatorname{cf}\lambda, \lambda)$.

Acá, $\Gamma = \Gamma(\theta, \sigma) = \{I : \exists\theta' < \theta\,(I \text{ es un ideal propio } \omega_1\text{-completo sobre } \theta')\}$, y $\operatorname{pp}_{\Gamma}(\lambda) = \operatorname{Sup}\{\operatorname{tcf}(\prod_{\alpha<\mu}\lambda_{\alpha}, <_I) : \lambda_{\alpha} = \operatorname{cf}\lambda_{\alpha} < \lambda = \operatorname{Sup}_{\alpha<\mu}\lambda_{\alpha}$ y $J^{\mathrm{bd}}_{\mu} \subseteq I \in \Gamma$ es un ideal sobre $\mu \leq \lambda\}$.

La 'generalización' del trabajo de Galvin y Hajnal es el siguiente

Lema 54. *Si* $(\lambda_{\alpha})_{\alpha\leq\kappa}$ *es una sucesión estríctamente creciente y continua de cardinales singulares* $> \kappa = \operatorname{cf}\kappa > \omega$, $h \in {}^{\kappa}\mathrm{ORD}$ *y, si* $\alpha < \kappa$, $\lambda_{\alpha}^{+h(\alpha)} = \operatorname{pp}(\lambda_{\alpha}) < \lambda_{\kappa}$ *y* $\operatorname{pp}(\lambda_{\kappa}) = \lambda_{\kappa}^{+\gamma}$, *y* $\mu \in [\lambda_{\alpha}, \lambda_{\alpha+1})$, $\operatorname{cf}\mu \leq \kappa$ *implica* $\operatorname{pp}_{\kappa}(\mu) < \lambda_{\alpha+1}$, *entonces* $\gamma \leq \|h\|$.

Acá, $\|h\|$ *es el rango de* h *(def. 33) respecto a* NS_{κ} *(o* $\mathcal{C}_{\kappa}$*).* $\square_{(\text{L54})}$

La demostración ([Sh8] cap. VIII) es por inducción en $\beta \leq \gamma$. Usando el lema, se tiene (en la prueba del teorema) primero, que $\operatorname{pp}\mu = \mu^{+}$ (por inducción) —con la notación del teorema—, y luego, que $\operatorname{pp}\lambda = \lambda^{+}$, esto porque $\operatorname{pp}(\mu) \leq \mu^{\operatorname{cf}\mu} \leq \mu^{+} + 2^{\operatorname{cf}\lambda}$ para $\mu < \lambda$. Teniendo que $\operatorname{pp}\lambda = \lambda^{+}$, usando el Lema 53.b) no es difícil ver que $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \lambda^{+}$.

Volvemos a omitir los detalles.

Capítulo 3

Core Models

¿Universo? La mera expresión de una idea minúscula en las mentes de quienes no saben lo que dicen. Esa palabra es una burla. Pero ¡cuán volublemente la pronuncian los hombres! ¡Qué poco comprenden lo artificioso de esa noción!

(Henry Hasse, *El Hombre que Encogió*, (1936).)

En este capítulo discutiremos la noción de *core models*, modelos internos canónicos para hipótesis de cardinales grandes, y su uso en el establecimiento de cotas inferiores para Con($\neg$SCH). Debido a la extensión del tema a tratar, en general omitiremos las demostraciones. Comencemos retomando el lema de cubrimiento visto en la sección 5 del capítulo 1.

Def. 49. Sea M un modelo interno. M es *rígido* sii no existe $j : M \xrightarrow{\prec} M$ no trivial.

En el Teorema 35 demostramos, entre otras cosas, que $0^\sharp$ no existe sii L es rígido. De hecho, para cualquier real a, $a^\sharp$ existe sii $\mathrm{L}[a]$ no es rígido. La hipótesis de no rigidez de un modelo interno M implica trascendencia sobre M ($\mathrm{V} \neq M$), pues si $j : M \xrightarrow{\prec} M$ es no trivial, j no es definible en M por el Teorema 23, de Kunen.

Lo importante en el caso de L, para la aritmética cardinal, no es tanto su rigidez o no. Es que, por el Teorema 36, esto equivale a la propiedad de cubrimiento para L.

Def. 50. Si M es un modelo interno, M tiene la *propiedad de cubrimiento*, CP(M), sii $\forall X \subseteq \mathrm{ORD}$, si X es no contable entonces hay un $Y \in M$ con $X \subseteq Y \subseteq \mathrm{ORD}$ y $|Y| = |X|$.

Nótese que el Corolario 15 es válido con $M \models$ GCH en lugar de L si remplazamos la hipótesis de no existencia de $0^\sharp$ por CP(M). Nuestra atención ha sido hasta ahora sobre todo para la noción de rigidez, pero CP es acá más relevante: los core models 'usualmente' satisfacen GCH y, aunque no necesariamente cumplen CP, sí cumplen algunas versiones débiles.

Estamos interesados en modelos de la forma $\mathrm{L}[A]$ o similares, de modo que contemos con una teoría de estructura fina a nuestra disposición. El plan original, que modificaremos rápidamente, es el siguiente:

Supongamos que podemos construir M modelo interno t.q. $M \models \mathrm{V} = M$, $M \models$ GCH y CP(M). Si P es una propiedad de cardinales grandes, y $\exists\kappa\, P(\kappa)$ se refleja (vale) en M, entonces en consistencia $\neg$SCH es más fuerte que $\exists\kappa\, P(\kappa)$. En efecto, si hay un M así, SCH vale. Luego, de $\mathrm{Con}\big(\exists\kappa\, P(\kappa)\big)$ no podemos deducir la consistencia de su negación.

Por desgracia, CP(M) es una propiedad muy restrictiva respecto a la estructura de M. Por fortuna, a veces las versiones débiles bastan.

1. Ultrapotencias Iteradas.

Recuérdese la demostración del Teorema 35. Ahí introdujimos un elemento básico para la teoría que queremos presentar.

Def. 51. [Kunen] Si M es un modelo transitivo de ZFC y $\kappa \in M$ es no contable en M, $\mathcal{U}$ es un M-*ultrafiltro* sobre κ sii $\langle M,\mathcal{U}\rangle \models \mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre κ, y si $f \in ({}^{\kappa}M)^M = {}^{\kappa}M \cap M$, entonces $\{\,\alpha < \kappa : f(\alpha) \in \mathcal{U}\,\} \in M$ ($\langle M,\mathcal{U}\rangle$ es *debilmente sensible*). En particular $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)^M$, aunque tal vez $\mathcal{U} \notin M$. Asumiremos que $\mathcal{U}$ es no principal y κ-completo en M (M-κ-*completo*).

Como era de esperarse, la existencia de ultrafiltros M-κ-completos implica que κ posee propiedades de cardinales grandes, aunque no necesariamente medibilidad; y tales propiedades deben estar presentes. Por ejemplo, si κ es (digamos) Ramsey, entonces hay un L-ultrafiltro sobre κ, L-κ-completo. Por otra parte, si hay M-ultrafiltros M-κ-completos para algún κ, κ es κ-Mahlo en M (de hecho, más).

En la demostración del Teorema 35 consideramos la ultrapotencia de L módulo $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ un L-ultrafiltro. La situación y sus resultados generalizan nuestro trabajo con medibles en el capítulo 0. Para comenzar, basta que $M \models \mathrm{ZFC}^-$, p. ej. $M = H_\kappa$ para $\kappa > \omega$ regular.

Def. 52. Si $\mathcal{U}$ es un M-ultrafiltro M-κ-completo sobre κ y $f \in {}^{\kappa}M \cap M$, $\llcorner f \lrcorner_{\mathcal{U}}$ es como en la definición 16, restringiéndonos a funciones $g \in M$. Si se desea formar una estructura $\mathcal{N} = \langle M^\kappa/\mathcal{U}, \mathcal{U}^{\mathcal{N}}\rangle$, debería definirse $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}$. Nosotros *definimos* la interpretación $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{N}$ viéndola como un predicado, y definiendo

$$\mathcal{N} \models \varphi(\vec{x}, \mathcal{U}^{\mathcal{N}})$$

para cada fórmula φ. Por inducción, basta definir $\mathcal{N} \models \llcorner f \lrcorner \in^{\mathcal{N}} \mathcal{U}^{\mathcal{N}}$, y esto significará $\{\,\alpha : f(\alpha) \in \mathcal{U}\,\} \in M$. Nótese que tal definición tiene sentido por sensibilidad débil. No estamos definiendo $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}$ como un conjunto, aunque esto será posible en el colapso transitivo de $\mathcal{N}$, en la forma obvia, si tal colapso existe.

$\mathcal{N}$ satisface el lema de Łoz, pero como ${}^{\kappa}M \cap M$ puede ser muy pequeño en realidad, $\mathcal{U}$ podría ser lo bastante débil como para que $M^\kappa/\mathcal{U}$ no sea $\in^{\mathcal{N}}$-bien fundamentado. Si sí lo es, tomemos su colapso, $\mathrm{Ult}(M,\mathcal{U}) = \mathrm{Ult}^M(M,\mathcal{U})$. Como antes, hay una sumersión canónica

$$j : \mathcal{M} = \langle M,\mathcal{U}\rangle \xrightarrow{\prec} \mathcal{M}' = \langle \mathrm{Ult}^M(M,\mathcal{U}), \mathcal{U}^{\mathcal{M}'}\rangle,$$

con crit $j = \kappa$ (y, si $\mathcal{M} \models \mathcal{U}$ es normal, $[\mathrm{id}_\kappa]_{\mathcal{U}} = \kappa$). $\mathcal{M}'$ no es necesariamente una clase de $\mathcal{M}$. Incluso, puede darse que $\mathrm{ORD}^{\mathcal{M}} < \mathrm{ORD}^{\mathcal{M}'}$.

Pero la teoría es muy parecida: $j \restriction_{V_\kappa^{\mathcal{M}}} = \mathrm{id}_{V_\kappa^{\mathcal{M}}}$, $V_\kappa^{\mathcal{M}} = V_\kappa^{\mathcal{M}'}$, $\mathcal{P}(\kappa)^{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(\kappa)^{\mathcal{M}'}$ (si $x \in \mathcal{P}(x)^{\mathcal{M}}$, $x = j(x) \cap \kappa \in \mathcal{M}'$. Si $x \in \mathcal{P}(x)^{\mathcal{M}'}$, digamos $x = [f]$, entonces

$$x = \{\,\alpha : \{\,\beta < \kappa : \alpha \in f(\beta)\,\} \in \mathcal{U}\,\} \in M,$$

por sensibilidad débil), $(\kappa^+)^{\mathcal{M}} = (\kappa^+)^{\mathcal{M}'}$, $\mathcal{U} \notin \mathcal{M}'$ y $\mathcal{U}^{\mathcal{M}'}$ es un $\mathcal{M}'$-ultrafiltro sobre $j(\kappa)$, normal en $\mathcal{M}'$ si $\mathcal{U}$ lo es en $\mathcal{M}$. Como j no es necesariamente sobre, también es importante notar que, al menos, es $\in$-cofinal. Ver [K] por detalles.

El objeto de esta sección es explicar cómo iterar la construcción de ultrapotencias, cuando sea posible. Nos interesa el caso en que tenemos modelos internos.

La idea es sencilla:

Se comienza con $M_0 = M, \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}, j_{00} = \mathrm{id}_M, \kappa_0 = \kappa$. Según $\langle M,\mathcal{U}\rangle$, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro *normal* sobre κ. Si ya están definidos M_α, $\mathcal{U}_\alpha$, κ_α y $j_{\alpha,\beta}$ para $\alpha \leq \beta < \delta$, donde cada M_α es transitivo, cada $\mathcal{U}_\alpha$ es un M_α-ultrafiltro normal sobre κ_α y $j_{\alpha\beta} : M_\alpha \xrightarrow{\prec} M_\beta$, entonces

- *Si* $\delta = \gamma+1$, *y* $\mathrm{Ult}^{M_\gamma}(M_\gamma,\mathcal{U}_\gamma)$ existe, sea M_δ esta clase, $j_{\gamma\delta}$ la sumersión asociada, $\kappa_\delta = j_{\gamma\delta}(\kappa_\gamma)$ y $\mathcal{U}_\delta$ el M_δ-ultrafiltro normal sobre κ_δ inducido por $j_{\gamma\delta}$. Si $\alpha \leq \gamma$, $j_{\alpha\delta} = j_{\gamma\delta} \circ j_{\alpha\gamma}$, y $j_{\delta\delta} = \mathrm{id}_{M_\delta}$.
- *Si* δ es límite, consideremos el límite del sistema dirigido (es dirigido por inducción) $\big\langle (\langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle)_{\alpha<\delta}, (j_{\alpha\beta})_{\alpha\leq\beta<\delta}\big\rangle$, $\big\langle\langle M',\mathcal{U}'\rangle, (j_\alpha)_{\alpha<\delta}\big\rangle$.

Lema 55. Si $\langle M',\mathcal{U}'\rangle$ *es bien fundamentado, sea* $\langle M_\delta,\mathcal{U}_\delta\rangle$ *su colapso. S.p.d.g.,* $M_\delta = M'$, $\mathcal{U}_\delta = \mathcal{U}$. *Entonces* $\mathcal{U}_\delta$ *es un* M_δ*-ultrafiltro normal sobre* $\kappa_\delta = j_\alpha(\kappa_\alpha)$ *para* $\alpha < \delta$.

Así, definiendo $j_{\alpha\delta} = j_\alpha$, $j_{\delta\delta} = \mathrm{id}_{M_\delta}$, podemos continuar.

Dem: Debe verificarse primero que $\langle M_\delta,\mathcal{U}_\delta\rangle$ puede tomarse, para lo que basta ver que $\in^{M'}$ es como-conjuntista. Esto es fácil: si $y \in^{M'} x$, $y = j_{\alpha\delta}(\bar{y})$ para algún $\alpha < \delta$ y $\bar{y} \in M_\alpha$, y $x = j_{\beta\delta}(\bar{x})$ para algún $\beta < \delta$ y $\bar{x} \in M_\beta$. S.p.d.g., $\alpha \geq \beta$, y por elementaridad $\bar{y} \in j_{\beta\alpha}(\bar{x})$.

Recíprocamente, esta condición equivale a que $y \in^{M'} x$. Luego,

$$y \in^{M'} x \longleftrightarrow \exists \alpha \in [\beta,\delta)\, \exists z \in M_\alpha \left(y = j_{\alpha\delta}(z) \wedge z \in j_{\beta\alpha}(\bar{x})\right),$$

y $\{\, y \in M' : y \in^{M'} x \,\}$ es un conjunto, por remplazo (si se quiere, puede remplazarse cada $\exists$ por $\exists!$, tomando el mínimo α testigo, y z ya es necesariamente único).

Del resto del enunciado lo único no trivial del todo es que $\langle M_\delta,\mathcal{U}_\delta\rangle$ es debilmente sensible: Si $f \in ({}^{\kappa_\delta}M_\delta)^{M_\delta}$, sea $\alpha < \delta$ t.q. $f = j_{\alpha\delta}(\bar{f})$ para alguna $\bar{f} \in ({}^{\kappa_\alpha}M_\alpha)^{M_\alpha}$. Como $\langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle$ es debilmente sensible, $\{\,\beta < \kappa_\alpha : \bar{f}(\beta) \in \mathcal{U}_\alpha\,\} \in M_\alpha$, y por elementaridad tenemos lo querido. $\square_{(\mathrm{L55})}$

Continúese la definición mientras se obtengan modelos bien fundamentados. Hay ahora 2 posibilidades: existe un η t.q. M_α está bien definido $\forall\alpha < \eta$, pero M_η no existe, o no hay tal η. En el primer caso, hagamos $\tau = \eta$, y en el segundo $\tau = \mathrm{ORD}$.

Def. 53. $\big(\langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha,\kappa_\alpha,j_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\leq\beta} : \alpha < \tau\big)$ es la *iteración* de $\langle M_0,\mathcal{U}_0\rangle$ y τ es su *longitud*. $\langle M_0,\mathcal{U}_0\rangle$ es *iterable* sii $\tau = \mathrm{ORD}$.

No hay problema en asumir que M_0 sea una clase propia, pues la iteración puede codificarse como una sola clase, ya que cada etapa es definible desde $\langle M_0,\mathcal{U}_0\rangle$.

Lema 56. *Si* $\alpha < \beta \in \tau$,

a) $j_{\alpha\beta} \restriction_{V^{M_\alpha}_{\kappa_\alpha}} = \mathrm{id}_{V^{M_\alpha}_{\kappa_\alpha}}$ *y* $j_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta > \kappa_\alpha$.

b) $\mathcal{P}(\kappa_\alpha)^{M_\alpha} = \mathcal{P}(\kappa_\alpha)^{M_\beta}$.

c) *Si* β *es límite,* $\kappa_\beta = \mathrm{Sup}_{\alpha<\beta}\,\kappa_\alpha$. $\square_{(\mathrm{L56})}$

Los ultrafiltros $\mathcal{U}_\alpha$ ($\alpha \in \tau$) pueden en general caracterizarse con facilidad. P. ej., Kunen mostró que (por normalidad) si α es límite,

$$\mathcal{U}_\alpha = \{ X \in \mathcal{P}(\kappa_\alpha)^{M_\alpha} : \exists \beta < \alpha (\{ \kappa_\gamma : \beta \leq \gamma < \alpha \} \subseteq X) \},$$

y tenemos el siguiente

Lema 57. $\forall \alpha < \tau \, (M_\alpha = \{ j_{0\alpha}(f)(a) : f \in M_0 \text{ y } a \in [\{\kappa_\beta\}_{\beta<\alpha}]^{<\omega} \})$. $\square_{(L57)}$

Ésta es una versión débil de normalidad que involucra también la idea de que los $(\kappa_\beta)_{\beta<\alpha}$ son indiscernibles en M_α para cada $\alpha \in \tau$. También la encontraremos en la demostración del Teorema 60 en el capítulo 4.

El concepto importante acá es el de modelo iterable. Estos admiten diversas caracterizaciones, comenzando con un resultado de Gaifman: $\tau = \mathrm{ORD} \longleftrightarrow \tau \geq \omega_1$.

Def. 54. Un M-ultrafiltro $\mathcal{U}$ es *contable-completo* sii $\forall f \in {}^\omega\mathcal{U} \, (\bigcap_n f(n) \neq \emptyset)$.

Pedir que $\mathcal{U}$ fuese ω_1-completo sería demasiado exigente, aunque por supuesto lo es en el sentido de $\langle M,\mathcal{U}\rangle$.

Def. 55. [Jensen] $\langle M,\mathcal{U}\rangle$ es *contablemente iterable* sii $\forall j : \langle N,\mathcal{V}\rangle \xrightarrow{\prec} \langle M,\mathcal{U}\rangle$ con N contable, la longitud de la iteración de $\langle N,\mathcal{V}\rangle$ es $\geq \omega_1$.

Teorema 45. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $\mathcal{U}_0$ normal en M_0:*

a) *$\langle M_0,\mathcal{U}_0\rangle$ es iterable.*
b) *[Gaifman] $\tau \geq \omega_1$.*
c) *[Kunen] Para algún $\alpha < \tau$, $\mathcal{U}_\alpha$ es contable-completo.*
d) *[Jensen] $\langle M_0,\mathcal{U}_0\rangle$ es contablemente iterable.*
e) *[Jensen-Dodd] Si $j : \langle N,\mathcal{V}\rangle \xrightarrow{\prec} \langle M_0,\mathcal{U}_0\rangle$, entonces $\langle N,\mathcal{V}\rangle$ es iterable.*

En particular, si M es un modelo interno, y $\mathcal{U} \in M$, o si hay un κ sobre el cual $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo, $\langle M,\mathcal{U}\rangle$ es iterable.

Dem: a) $\to$ b) Trivial.

b) $\to$ c) $\tau > \omega_1$ por regularidad de ω_1: si $\langle \langle M,\mathcal{U}\rangle, (j_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \rangle$ es el límite de

$$\langle (\langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle)_{\alpha<\omega_1}, (j_{\alpha\beta})_{\alpha\leq\beta<\omega_1} \rangle,$$

y $(f_n)_n$ es $\in^M$-decreciente, sea $(g_n)_n$ t.q. $f_n = j_{\alpha_n}(g_n)$ para cada n. $\alpha = \mathrm{Sup}_n \, \alpha_n < \omega_1$, y en $\langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle$ habría una sucesión $\in$-descendente.

El resutado querido se demuestra análogamente, con $\alpha = \omega_1$ testigo de c):

Por la caracterización de Kunen de los $\mathcal{U}_\alpha$, mencionada arriba, si $X_n \in \mathcal{U}_{\omega_1}$, hay un $\alpha_n < \omega_1$ con $\{\kappa_\beta\}_{\alpha_n \leq \beta} \subseteq X_n$. Entonces $\bigcap_n X_n \neq \emptyset$, pues $\kappa_{\mathrm{Sup}_n \alpha_n}$ es uno de sus elementos.

c) $\to$ d) La demostración recuerda el argumento con que mostramos el Teorema 16.b). Sea α como en c). Basta mostrar que $\langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle$ es contablemente iterable. Sea $\langle N_0,\mathcal{V}_0\rangle$ contable y sumergible elementalmente en este modelo. Por inducción en $\beta < \omega_1$ se verifica que $\langle N_\beta,\mathcal{V}_\beta\rangle$ está bien definido, y que hay una sumersión $e_\beta : \langle N_\beta,\mathcal{V}_\beta\rangle \xrightarrow{\prec} \langle M_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle$

compatible con las sumersiones generadas por la iteración de $\langle N_0, \mathcal{V}_0\rangle$; esto es, si $j^{N_0}_{\beta\gamma}$: $N_\beta \xrightarrow{\prec} N_\gamma$ es como arriba, $e_\beta = e_\gamma \circ j^{N_0}_{\beta\gamma}$ para $\beta \leq \gamma < \omega_1$. En etapas límite β esto es fácil, pues N_β es un límite directo (sumergible en $\langle M_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\rangle$ gracias a los e_γ, $\gamma < \beta$). Si N_β, $\mathcal{V}_\beta$, e_β han sido definidos ($\beta < \omega_1$) entonces $|N_\beta| = \omega$, como se verifica rápidamente, y $\bigcap e_\beta``\mathcal{V}_\beta \neq \emptyset$, por la escogencia de α. Sea μ en tal intersección. Definiendo $j : \langle N_\beta^{\rho_\beta}/\mathcal{V}_\beta, \mathcal{V}^{N_\beta^{\rho_\beta}/\mathcal{V}_\beta}\rangle \to \langle M_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\rangle$, donde ρ_β es el N_β-cardinal sobre el que $\mathcal{V}_\beta$ es un N_β-ultrafiltro, por

$$j([f]) = e_\beta(f)(\mu),$$

es fácil ver que j es elemental, y por tanto la ultrapotencia es bien fundamentada, y $\langle N_{\beta+1}, \mathcal{V}_{\beta+1}\rangle$ está bien definido. Es sencillo mostrar que la sumersión $e_{\beta+1}$ de este modelo en $\langle M_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\rangle$ satisface $e_\beta = e_{\beta+1} \circ j^{N_0}_{\beta(\beta+1)}$, y de aquí es clara la condición más general que también debe verificar.

d) $\to$ e) Si $j : \langle N, \mathcal{V}\rangle \xrightarrow{\prec} \langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle$, $\langle N, \mathcal{V}\rangle$ también es contablemente iterable. Así que nos basta ver que si $\langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle$ lo es, entonces es iterable. Por contradicción, supongamos que $\tau \in$ ORD.

- *Si* $\tau = \beta + 1$, sea $\mathcal{M} = \langle M_\beta^{\kappa_\beta}/\mathcal{U}_\beta, \in^{\mathcal{M}}, \mathcal{U}^{\mathcal{M}}\rangle$.
- *Si* τ *es límite*, sea $\mathcal{M}$ el límite directo de la iteración de $\langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle$.

En ambos casos, sea $i_\tau : \langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle \xrightarrow{\prec} \mathcal{M}$ la sumersión asociada.

La demostración depende de generalizaciones de los resultados mencionados arriba sobre caracterizaciones de las ultrapotencias; la idea es tomar un testigo $\{x_n\}_n$ de que $\mathcal{M}$ no es bien fundamentado, con $x_{n+1} \in^{\mathcal{M}} x_n\ \forall n < \omega$. Asociado con cada x_n encontramos un conjunto A_n finito de ordinales $< \tau$ y una función finitaria $f_n \in M_0$ t.q.

$$x_n = i_\tau(f_n)(\overrightarrow{\kappa_\alpha})_{\alpha \in A_n},$$

por el Lema 57.

La clausura de Skolem de $\{f_n\}_n$ en $\langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle$ produce una subestructura elemental contable de $\langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle$,$\langle N, \mathcal{V}\rangle$. Si τ^N es la longitud de la iteración asociada con N, por hipótesis $\tau^N \geq \omega_1$, y por tanto $\tau^n >$ otp $\bigcup_n A_n$. Un argumento con indiscernibles, y el lema de Łoz permiten entonces construir una sucesión $\{\bar{x}_n\}_n \subseteq N$ t.q. $x_{n+1} \in^{\mathcal{M}} x_n$ implica $\bar{x}_{n+1} \in \bar{x}_n$ para cada n. Pero esto es una contradicción.

e) $\to$ a) Trivial. $\square_{(T45)}$

2. L[$\mathcal{U}$].

En la sección 5.c del capítulo 1 explicamos construibilidad relativa. En este capítulo trataremos con casos particulares de tal construcción, relacionados con la presencia de cardinales grandes en V. Supongamos por ejemplo que κ es medible, y que $\mathcal{U}'$ es normal sobre κ. Si $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cap$ L[$\mathcal{U}'$], $\mathcal{U} \in$ L[$\mathcal{U}$] = L[$\mathcal{U}'$] y $\mathcal{U}$ es normal sobre κ en el sentido de L[$\mathcal{U}$]. En lo que sigue supondremos que es tal el caso. En general esto puede darse sin que siquiera sea necesario asumir que κ es un cardinal (en V).

El resultado principal de [Ku1] es el siguiente teorema.

Def. 56. $\mathcal{M} = \langle$L[$\mathcal{U}$]$,\mathcal{U}\rangle$ es un *κ-modelo* sii $\mathcal{U} \in$ L[$\mathcal{U}$] y $\mathcal{M} \models \mathcal{U}$ es normal sobre κ.

Teorema 46. *[Kunen]*

a) *Si* $\langle L[\mathcal{U}], \kappa\rangle$ *es un* κ*-modelo, entonces en* $L[\mathcal{U}]$ κ *es el único medible y* $\mathcal{U}$ *la única medida normal sobre* κ.

b) *Además,* $\forall\kappa$ *existe a lo más un* $\mathcal{U}$ *t.q.* $\langle L[\mathcal{U}], \mathcal{U}\rangle$ *es un* κ*-modelo.*

c) *Los modelos* $L[\mathcal{U}]$ *así construidos están relacionados entre sí en el siguiente sentido:*

$$\forall\kappa_1, \kappa_2\, (\kappa_1 < \kappa_2 \wedge \langle L[\mathcal{U}_i], \mathcal{U}_i\rangle \text{ es un } \kappa_i\text{-modelo } (i = 1, 2) \longrightarrow$$

$L[\mathcal{U}_2]$ *es una ultrapotencia iterada de* $L[\mathcal{U}_1]$*, es decir, si* $M_0 = L[\mathcal{U}_1]$ *y* $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_1$ *(de modo que* $\tau = ORD$*), hay un* α *con* $\langle M_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\rangle = \langle L[\mathcal{U}_2], \mathcal{U}_2\rangle$*).*

Hallamos así el primer ejemplo no trivial de *comparación* (de iteraciones) de modelos dados, básica a la teoría de Core Models.

Dem: a) Supongamos que $\langle \mathrm{L}[\mathcal{U}], \mathcal{U}\rangle$ es un κ-modelo. Comencemos verificando el resultado, debido a Solovay, de que en $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$ no hay más medibles que κ. Hay varias formas de argumentar. Por ejemplo, puede mostrarse que si $\lambda > \kappa$ es medible en $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$ —o, incluso, Ramsey— hay un sostenido para $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$, lo que contradice que $\mathrm{L}[\mathcal{U}] \models \mathrm{V} = \mathrm{L}[\mathcal{U}]$. La existencia de tal sostenido suele expresarse diciendo que $0^\dagger$ existe; hipótesis a la que volveremos en la siguiente sección.

Una prueba directa puede darse como sigue: S.p.d.g. $\mathrm{V} = \mathrm{L}[\mathcal{U}]$, y supongamos que λ también es medible. Sea $\mathcal{V}$ normal sobre λ, $j = j_{01}^{\mathcal{V}} : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{M}$.

Si $\kappa < \lambda$, $\mathcal{U} \in \mathrm{V}_\lambda$, así que $j(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ y $\mathcal{M} = \mathrm{L}[j(\mathcal{U})] = \mathrm{L}[\mathcal{U}] = \mathrm{V}$, una contradicción.

Si $\lambda < \kappa$, mostremos que $j(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$, de nuevo una contradicción: Si $I = \{\mu \in (\lambda, \kappa] : \mu$ es fuertemente inaccesible$\}$, $j\restriction_I = \mathrm{id}_I$, por el Teorema 17.b. Si $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$, por normalidad $X \cap I \in j(\mathcal{U})$. Luego, $\mathcal{U} \cap \mathcal{M} \subseteq j(\mathcal{U})$. Pero $j(\mathcal{U}) \in \mathcal{M}$ y $j(\mathcal{U}) \in \mathcal{M}$ y $j(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, ya que si $X = [f] \in j(\mathcal{U})$, $(\bigcap \mathrm{Ran}\, f) \cap I \subseteq X$, y $\bigcap \mathrm{Ran}\, f \in \mathcal{U}$.

Demos ahora la idea de la demostración de que $\mathcal{U}$ es la única medida normal sobre κ en $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$: Claramente, basta probar b) pues entonces en $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$ si $\mathcal{V}$ es normal en κ y $\mathcal{V} \cap \mathrm{L}[\mathcal{V}] = \mathcal{V}'$, $\mathrm{L}[\mathcal{V}']$ es un $\kappa - modelo$ y por unicidad $\mathcal{V}' = \mathcal{U}$, y por tanto $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Si $\lambda > \kappa$ es regular y suficientemente grande (basta que $\lambda > |({}^\kappa\kappa)^{\mathrm{L}[\mathcal{U}]}|$), $j_{0\lambda}(\kappa) = \lambda$ y $\mathcal{C}_\lambda \cap \mathrm{L}[\mathcal{C}_\lambda] = j_{0\lambda}(\mathcal{U})$ (recuérdese que $\mathcal{C}_\lambda$ es el filtro club sobre λ).

Para λ así, si $\kappa' \leq \kappa$ y N es un κ'-modelo, $\mathcal{P}(\kappa') \cap N = \mathcal{P}(\kappa') \cap \mathrm{L}[\mathcal{C}_\lambda] = \mathcal{P}(\kappa') \cap \mathrm{L}[\mathcal{U}]$. Puede mostrarse que $\mathrm{L}[\mathcal{U}] \models \mathrm{GCH}$, lo que permite probar que si $\delta > (\kappa^+)^{\mathrm{L}[\mathcal{U}]}$ (por ejemplo, $\delta = \lambda$), $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\delta}$ es creciente, $\gamma_0 > \kappa$ y $\mu > \mathrm{Sup}_\alpha \gamma_\alpha$ es un cardinal, $\mathcal{P}(\kappa) \cap \mathrm{L}[\mathcal{U}] = \mathcal{P}(\kappa) \cap N$, para $N = \mathrm{L}[\mathcal{V}]$ 'otro' κ-modelo, está contenido en la clausura de Skolem de $X = \{\gamma_\alpha\}_\alpha \cup (\kappa + 1)$ en $\mathrm{L}_\mu[\mathcal{U}]$.

Entonces, si λ, δ, $(\gamma_\alpha)_\alpha$ y μ son como arriba, s.p.d.g. cada γ_α y δ es dejado fijo por $j_{0\lambda}$, y si $x \in \mathcal{U}$, $x = \{\beta < \kappa : \mathrm{L}_\mu[\mathcal{U}] \models \varphi[\beta, \kappa, \bar{g}_\alpha, \bar{e}ta]\}$ para algunos parámetros η en κ y alguna fórmula φ. Claramente, basta mostrar $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Pero si $y \in \mathrm{L}_\mu[\mathcal{V}]$ es el conjunto definido de igual forma, $y \in \mathcal{V}$ y $j_{0\lambda}^{\mathcal{V}}(y) = \{\beta < \lambda : \mathrm{L}_\mu[\mathcal{C}_\lambda] \models \varphi[\beta, \lambda, \bar{g}_\alpha, \bar{\eta}]\} = j_{0\lambda}^{\mathcal{U}}(x)$ y $x = j_{0\lambda}^{\mathcal{U}}(x) \cap \kappa = j_{0\lambda}^{\mathcal{V}}(y) \cap \kappa = y$.

c) Sea ρ mínimo tal que hay un ρ-modelo $\langle M_0, \mathcal{U}_0\rangle$. Sea $\mathcal{N}$ un σ-modelo. Si $\sigma = j_{0\alpha}(\rho)$ para algún α, $\mathcal{N} = \langle M_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\rangle$ por b), así que basta mostrar que $j_{0\alpha}(\rho) < \sigma < j_{0(\alpha+1)}$ es imposible, y para esto es suficiente asumir $\alpha = 0$. Sea $\mathcal{V}$ normal sobre σ en $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{C}_\lambda$,

$(\gamma_\alpha)_{\alpha<\delta}$ y $\mu > \lambda = \mathrm{cf}\,\lambda > \sigma^+$ son como en b), como $\alpha = 0$ $\sigma = [f]_{\mathcal{U}_0}$ para alguna función f, y $j_{0\lambda}(f)$ está en la clausura de Skolem de $\{\gamma_\alpha\}_\alpha \cup (\rho+1) \cup \{\lambda\}$ en $\mathrm{L}_\mu[\mathcal{C}_\lambda]$. Como $\mathcal{U}_0$ es normal, $j_{01}(f)(\kappa) = \sigma$. También $j_{0\lambda}(f)(\kappa) = \sigma$, y por tanto σ es definible en la clausura antes mencionada.

Esto nos lleva a una contradicción, pues si

$$\mathrm{L}_\mu[\mathcal{C}_\lambda] \models \sigma = t[\vec{\gamma}_\alpha, \vec{\beta}, \lambda] \quad (\text{los parámetros } \vec{\beta} \text{ en } \rho+1),$$

por $j_{01}^{\vec{\mathcal{V}}}$ tendríamos también $\mathrm{L}_\mu[\mathcal{C}_\lambda] \models j_{01}^{\mathcal{V}}(\sigma) = t[\vec{\gamma}_\alpha, \vec{\beta}, \lambda]$. Pero $j_{01}^{\mathcal{V}}(\sigma) > \sigma$. $\square_{(\mathrm{T46})}$

En la siguiente sección mostraremos, entre otras cosas, que si $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$ es un κ-modelo, entonces si es rígido satisface una propiedad de cubrimiento débil, de modo que en consistencia $\neg$SCH es más fuerte que la existencia de un medible.

3. K y el Lema de Cubrimiento de Dodd-Jensen.

Supongamos que hay un κ-modelo para algún κ. Entonces $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{ORD}} \mathrm{L}[\mathcal{U}_\alpha]$, donde $\mathrm{L}[\mathcal{U}_0]$ es un κ-modelo, *no* depende de κ, por el Teorema 46.c), ya que $(L[\mathcal{U}_\alpha])_\alpha$ es decreciente. En esta sección definiremos K, el primer modelo que recibió el nombre de *Core Model*. K, al contrario de L, no es absoluto. Su forma depende en gran medida de los cardinales grandes presentes en el universo. Si llegase a haber un modelo interno con un medible, $\mathrm{K} = \bigcap_\alpha \mathrm{L}[\mathcal{U}_\alpha]$, con $\mathrm{L}[\mathcal{U}_0]$ como arriba, y ésta es su forma maximal.

Requeriremos de algunos elementos básicos de estructura fina. El estudio detallado de K depende profundamente de la teoría de estructura fina, pero no lo emprenderemos acá. K estará formado por *ratones*. Los ratones serán *comparables*, de manera análoga a lo indicado en el Teorema 46.c). Si $0^\sharp$ no existe, K = L, y los ratones se reducirían a las etapas de la jerarquía $(J_\alpha)_\alpha$, que son comparables trivialmente mediante contenencia. A medida que se asciende en la jerarquía de cardinales grandes, los resultados de comparación resultan más difíciles, y oportunamente los iremos mencionando.

Para evitar trivialidades, se exige que exista $0^\sharp$ para que existan ratones. De hecho, el primer ratón (en un orden que más adelante definiremos) y $0^\sharp$ son interdefinibles, y cada sostenido (asociado a un real) genera un ratón. La introducción de K por Dodd y Jensen se debió a su deseo de generalizar los resultados respecto a L que se tenían gracias al lema de cubrimiento. La forma maximal de K es responsable del resultado mencionado al final de la sección anterior.

Omitiremos los detalles, para los cuales referimos a [DoJe1,2,3] y [Do1,2].

Def. 57. $N = J_\alpha[\mathcal{U}]$ es un *prerratón* sii es un $N \models \mathcal{U}$ es normal sobre κ para algún $\kappa < \alpha$. En tal caso, N es un prerratón en κ.

Lema 58. *Si* $N_0 = J_\alpha[\mathcal{U}_0]$ *es un prerratón y la ultrapotencia de* N_0 *por* $\mathcal{U}_0$ *es bien fundamentada,* $\mathrm{Ult}(N_0, \mathcal{U}_0)$ *es un prerratón.* $\square_{(\mathrm{L58})}$

Esto se sigue rápidamente de la teoría general de iteraciones.

Def. 58. Si M_0 y N_0 son prerratones, $M_0 <^* N_0$ sii son iterables y $M_\alpha \in N_\alpha$ para alguna etapa α de la iteración. $M_0 \approx N_0$ sii $M_\alpha = N_\alpha$ para algún α.

Lema 59.

a) *Cualesquiera 2 prerratones iterables M_0 y N_0 son $<^*$-comparables.*

b) *$M_0 \approx N_0$ sii $M_0 = N_0$ o M_0 es una iterada de N_0 o viceversa.*

c) *$<^*$ es un buen orden en las clases de equivalencia generadas por $\approx$.* $\square_{(L59)}$

La demostración depende de resultados similares a los ya mencionados: Si M_0 es un prerratón en κ iterable y $\theta > \kappa$ es regular, hay un α t.q. $N_\theta = J_\alpha[\mathcal{C}_\theta]$. De aquí a) es inmediato, y c) se sigue también con facilidad.

Dodd y Jensen introducen entonces el concepto de prerratón *aceptable*. La definición es técnica, y la omitimos. Si un prerratón N es aceptable, $\forall \mu \in N$ infinito hay una sucesión $(a^\mu_{ij} : i < \mu \wedge \omega j < (\mu^+)^N)$ que codifica a $\mathcal{P}(\mu) \cap N$ y tal que todo segmento inicial ($\omega j < \tau$ para algún $\tau < (\mu^+)^N$) está en N. Esta sucesión es $\Sigma_1(N)$ de manera uniforme. Tal codificación permite establecer algunos resultados que muestran características del Σ_1-*proyectum* ρ_N de N, definido como el menor $\rho \leq \alpha$ t.q. $\mathcal{P}(\omega\rho) \cap \Sigma_1(N) \nsubseteq N$, donde $N = J_\alpha[\mathcal{U}]$. Si N es aceptable, su Σ_1-proyectum mantiene la mayoría de las características del Σ_1-proyectum de α, como las mencionadas hacia el final del capítulo 0; en particular hay códigos estándar. Como se mencionó en el capítulo 0, esto permite caracterizar las sumersiones elementales (o Σ_1-elementales) que se presentan al relacionar distintos prerratones.

Se define entonces el concepto de *ratón*, básicamente un prerratón aceptable N asociado con el cual hay un 'prerratón' iterable N'. Con la iteración de N' se puede definir una 'iteración' (*mouse iteration*) de N.

Simplificando bastante (de modo que no podremos desarrollar la teoría de estructura fina de K), nos limitaremos a prerratones en κ N iterables con $\rho_N \leq \kappa$ (puede mostrarse que todo prerratón iterable es aceptable).

Si $0^\sharp$ existe y $S = (\kappa_\alpha)_\alpha$ es la clase de indiscernibles de Silver para L, enumerados en orden creciente, sea $\kappa = \kappa_\omega$, y sea $\mathcal{U} = \{\, x \subseteq \kappa : S \subseteq x \text{ es acotado en } \kappa \,\}$. Entonces $J_{\kappa+1}[\mathcal{U}]$ es un prerratón en κ, y puede mostrarse que $0^\sharp \in \Sigma_1(J_{\kappa+1}[\mathcal{U}]) \setminus J_{\kappa+1}[\mathcal{U}]$. Esto grantiza que $N = J_{\kappa+1}[\mathcal{U}]$ es un ratón (de hecho, $\rho_N = 1$). En el orden $<^*$ definido previamente, N resulta el menor ratón, y la existencia de uno implica la de $0^\sharp$.

Asociado con cada ratón $N = J_\alpha[\mathcal{U}]$ hay una familia C_N de indiscernibles para N (C_N puede ser vacío). C_N es de la forma $\bigcap(\mathcal{U} \cap h_{N'}``(\omega \times [J_{\rho_{N'}} \cup p_{N'}]^{<\omega}))$. Acá, $h_{N'}$ se define en términos de las sucesiones (a^μ_{ij}) mencionadas más arriba y resulta ser una función de Skolem *canónica* para N, y $p_{N'}$ es una sucesión finita de ordinales t.q. hay un $A \subseteq \mathrm{ORD}$ $\Sigma_1(N')$ con $A \cap \omega\rho_{N'} \notin N'$. La exigencia de condiciones adicionales, y de un buen orden *estándar* de $[\mathrm{ORD}]^{<\omega}$ garantizan la buena definición de $p_{N'}$. Puede mostrarse que los códigos estándar A_N y los conjuntos $p_{N'}$ son conceptos reducibles uno al otro.

Para todo κ hay a lo más un ratón N que es prerratón en κ (un ratón en κ), para el cual $|C_N| = \omega$.

Def. 59. $\mathcal{D} = \{\, (\xi, \kappa) : \xi \in C_N \text{ para } N \text{ un ratón en } \kappa \text{ con } |C_N| = \omega \,\}$.
Si $\alpha \in \mathrm{ORD}$, $\mathrm{K}_\alpha = J_\alpha[\mathcal{D}]$ y $\mathrm{K} = \mathrm{L}[\mathcal{D}] = \bigcup_\alpha \mathrm{K}_\alpha$. K es el *core model*.

Nótese que $\mathrm{K} = \mathrm{L}$ si $0^\sharp$ no existe, pues en tal caso $\mathcal{D} = \emptyset$. Así mismo, si $0^{\sharp(\alpha)}$ existe pero no $0^{\sharp(\alpha+1)}$, $\mathrm{K} = \mathrm{L}[0^{\sharp(\alpha)}]$. Algo más difícil de demostrar, si $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$ es un κ-modelo con iteración $\langle \mathrm{L}[\mathcal{U}_\alpha], \mathcal{U}_\alpha, \kappa_\alpha \rangle_\alpha$, $\mathrm{K} = \bigcap_\alpha \mathrm{L}[\mathcal{U}_\alpha]$.

K es un modelo interno que satisface GCH, y los comentarios anteriores muestran que definitivamente K no es absoluto aunque, si M es un modelo interno, $K^M = K \cap M$.

a. El Lema de Cubrimiento para K.

El resto de esta sección está dedicado a discutir la generalización del resultado de la sección 5.b del capítulo 1 al caso de K. Como mencionamos al comienzo de este capítulo, no conseguiremos mostrar CP(K), pero sí una versión débil, de la que se sigue que la existencia de un medible no basta para forzar $\neg$SCH.

La demostración de esta versión débil requiere estructura fina, de modo que sólo daremos una rápida idea.

Def. 60. '$0^\dagger$ *(0 daga) existe*' es la afirmación de que hay un κ-modelo para algún κ, que no es rígido.

Como con $0^\sharp$, puede definirse $0^\dagger$ como un subconjunto de ω, y *no* pertenece a ningún κ-modelo. Hay varias caracterizaciones de la existencia de $0^\dagger$. Kunen mostró, por ejemplo, que si κ es medible, $0^\dagger$ existe sii $(\kappa^{++})^{L[\mathcal{U}]} \leq 2^\kappa$, donde $L[\mathcal{U}]$ es el κ-modelo. En particualr, los medibles satisfacen la hipótesis del continuo si $0^\dagger$ no existe.

Teorema 47. *Si* $\neg$ CP(K) *entonces hay un modelo interno con un medible. En tal caso, si* $0^\dagger$ *no existe, entonces o bien el menor κ-modelo $L[\mathcal{U}]$ tiene la propiedad de cubrimiento, o hay una sucesión de Prikry C para $\mathcal{U}$ tal que $L[\mathcal{U}][C]$ tiene la propiedad de cubrimiento.*

Observación. El resultado no puede mejorarse. Más exactamente, del resultado de Prikry en la sección 4.b del capítulo 1 se sigue que si $L[\mathcal{U}]$ es un κ-modelo, hay una estensión genérica de $L[\mathcal{U}]$ donde $L[\mathcal{U}]$ *no tiene* la propiedad de cubrimiento (pues cf $\kappa = \omega$ en la extensión).

Corolario 20. *Si* $0^\dagger$ *no existe entonces SCH vale. En particular, la existencia de un medible no basta para establecer* Con($\neg$*SCH*).

Dem: K, $L[\mathcal{U}]$ y $L[\mathcal{U}][C]$ son modelos de GCH, donde $\mathcal{U}$ y C son como en el enunciado del teorema, pues forcing con C no altera la exponencial. El resultado se sigue, como se mencionó antes de la sección 1. $\square_{(\mathrm{C20})}$

Dem: (Teorema 47) La demostración se realiza en 3 etapas: Primero se establece que si K no es rígido, hay un modelo interno con un medible. Luego, se muestra que si K es rígido, CP(K). Finalmente, se establece el resultado sobre $L[\mathcal{U}]$.

Primera Etapa.

Nótese que si hay un tal modelo interno, K *no* es rígido, como se sigue facilmente de considerar su forma en este caso.

Lema 60. *Si* $j : K \xrightarrow{\prec} M$, *$M$ un modelo interno, entonces $M = K$.*

Dem: O bien K = L, o bien existen ratones. En el primer caso, tenemos lo querido, y $j = \mathrm{id}_L$. En el segundo, por elementaridad $M \models \forall x \exists N\,(N$ es un ratón y $x \in N)$. Entonces $M \subseteq K$. Por contradicción, si N es un ratón en κ en $K \setminus M$, y $\theta > j^\omega(\kappa)$ es regular, entonces sean $N^n = j^n(N)$ y $\bar{N}^n = N^n_\theta$ la θ-ésima iterada de N^n para $n \in \omega$. Puede mostrarse que $\bar{N}^{n+1} \in \bar{N}^n$, y por tanto $(\bar{N}^n)_n$ contradice fundamentación. $\square_{(\mathrm{L60})}$

Supongamos que K no es rígido. Entonces $\exists\kappa\,\exists\mathcal{U}\,(\forall Y\in \mathrm{K}\,(|Y|^{\mathrm{K}}\le\kappa\to Y\cap\mathcal{U}\in\mathrm{K})$ y $\mathcal{U}$ es una medida normal en $\mathcal{P}(\kappa)^{\mathrm{K}}$ contable-completa).

En [DoJe1] se demuestra esto bajo una hipótesis adicional: si $j:\mathrm{K}\xrightarrow{\preceq}\mathrm{K}$, $\operatorname{crit} j=\bar\kappa$ y $j(\bar\kappa)=\kappa$ es *regular*, enronces κ es como arriba. Para mostrarlo, se definen conjuntos X_α ($\alpha\in[\bar\kappa,\kappa]$) con ayuda de h_{K}, la función de Skolem canónica para K, y sumersiones $j_\alpha:\mathrm{K}\xrightarrow{\preceq}\mathrm{K}$ (acá se apela al Lema 60). Si α es cerrado bajo las funciones primitivas recursivas (ver def. 31), $X_\alpha=\{\,j_\alpha(f)(\mu):\mu<\alpha, f\in({}^{\kappa_\alpha}\mathrm{K})^{\mathrm{K}}\,\}$.

Si $\tau_\alpha=(\alpha^+)^{\mathrm{K}}$, $\mathcal{U}_\alpha=\{\,X\in\mathcal{P}(\alpha)^{\mathrm{K}}:\alpha\in j_\alpha(X)\,\}$ para α así,

$$\langle \mathrm{K}_{\tau_\alpha},\mathcal{U}_\alpha\rangle\models \mathcal{U}_\alpha \text{ es normal sobre } \alpha,$$

y $\langle \mathrm{K}_{\tau_\alpha},\mathcal{U}_\alpha\rangle$ es sensible.

Si $\operatorname{cf}(\tau_\kappa)>\omega$, $\mathcal{U}=\bigcup_{\mu<\tau_{\bar\kappa}} j(\mathcal{U}_{\bar\kappa}\cap\mathrm{K}_\mu)$ es el ultrafiltro buscado.

Si $\operatorname{cf}(\tau_\kappa)=\omega$, pueden definirse subconjuntos $\mathcal{U}^n_\alpha$ ($n<\omega$) de cada $\mathcal{U}_\alpha$, y $\mathcal{U}=\bigcup_n j_\alpha(\mathcal{U}^n_\alpha)$ para α suficientemente grande es como se busca.

Luego, podemos tomar κ y $\mathcal{U}$ como arriba. Si hay un modelo interno con un medible, terminamos. En otro caso, $\mathcal{P}(\kappa)^{\mathrm{L}[\mathcal{U}]}\not\subseteq\mathcal{P}(\kappa)^{\mathrm{K}}$. Sea $x\in\mathcal{P}(\kappa)\cap(\mathrm{L}[\mathcal{U}]\setminus\mathrm{K})$, y α mínimo con $x\in J_{\alpha+1}[\mathcal{U}]$. De las condiciones en $\mathcal{U}$ y κ, $M=J_\alpha[\mathcal{U}]$ es un prerratón iterable, y $\rho_M\le\kappa$. Si N es $<^*$-mayor que M, $M'\in N$ para alguna iterada M' de N, y si x es $\Sigma_n(M)$, de $\Sigma_n(M)\cap\mathcal{P}(\kappa)=\sigma_n(M')\cap\mathcal{P}(\kappa)\subseteq N\subseteq\mathrm{K}$ obtenemos la contradicción $x\in\mathrm{K}$.

Segunda Etapa.

Si K es rígido, CP(K).

La demostración recuerda la del Teorema 36, pero requiere de bastante más trabajo y procede como en [DJe] y no como en la mostrada; por supuesto, podemos asumir la existencia de $0^\sharp$. Se comienza formulando una versión débil que basta para implicar el resultado. Esta versión es análoga a (la negación de) la afirmación luego del Lema 43. El argumento consiste en mostrar que si esta versión no vale, hay un modelo interno con un medible.

Primero, se muestra que K es invariante bajo extensiones genéricas de V (por conjuntos), básicamente una generalización a ratones arbitrarios del resultado para $0^\sharp$ mostrado luego del Lema 42.

Luego, asumiendo un contraejemplo a la afirmación, se consigue una extensión genérica en la que hay un tal contraejemplo, y con él se construye el modelo interno, lo que contradice la rigidez de K, o la afirmación vale, y de manera elemental se sigue que vale en V.

Para establecer esto se requiere estructura fina. Se establece un análogo a condensación y se aprovecha la estructura de los conjuntos de indiscernibles C_N asociados con algunos ratones. El modelo interno se construye aprovechando una sucesión de ratones particular (un 'nest of mice'), coherentes en cierto sentido. La existencia de esta sucesión permite construir un sistema dirigido cuyo límite directo produce un κ-modelo.

Tercera Etapa.

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro normal sobre un medible κ, una ω-sucesión C cofinal en κ es de Prikry para $\mathcal{U}$ sii $\forall x\in\mathcal{U}\,\exists\gamma<\kappa\,(C\setminus\gamma\subseteq x)$, o equivalentemente sii $\forall x\in\mathcal{U}\,(|C\setminus x|<\omega)$.

Por supuesto, tal C sólo existe en una extensión genérica del universo. Que C sea de Prikry quiere decir que permite definir un $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$-genérico, y existe en la extensión por tal conjunto ($\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$ es el forcing de Prikry, definido en la sección $4.b$ del capítulo 1). Esta caracterización es debida a Mathias.

Si L[$\mathcal{U}$] es como en la hipótesis del teorema, supongamos que es rígido, pero no posee la propiedad de cubrimiento. Puede mostrarse que el menor L[$\mathcal{U}$]-cardinal para el cual falla CP es κ mismo. Se fija un nest of mice $\mathcal{A}$, que existe porque la existencia de L[$\mathcal{U}$] garantiza la no rigidez de K, y se construye una sucesión de ordinales Δ' tal que si

$$\Delta = \{\, \rho : \exists N \in \mathcal{A}\,(N \text{ es un ratón en } \rho)\,\},$$

entonces Δ' es estacionario en Δ y $\forall \alpha, \alpha' \in \Delta' \, \exists \gamma < \kappa (j_\alpha``(C_\alpha \setminus \gamma) = j_{\alpha'}``(C_{\alpha'} \setminus \gamma))$, donde C_α es C_N para $N \in \mathcal{A}$ un α-ratón, y j_α es un isomorfismo entre ratones definido en términos de Δ.

Si $\alpha \in \Delta'$ y $C = j_\alpha``C_\alpha$, por la forma en que los j_α son definidos, si $x \in \mathcal{P}(\kappa)^{\mathrm{L}[\mathcal{U}]}$, $x \in \mathcal{U} \leftrightarrow \exists \gamma < \kappa (C \setminus \gamma \subseteq x)$, de modo que C es una sucesión de Prikry para $\mathcal{U}$, y sólo debe mostrarse que CP(L[$\mathcal{U}$][C]). Si esto no es así, de nuevo el menor cardinal que da un contraejemplo es κ, pues de lo contrario L[$\mathcal{U}$] no es rígido. Se muestra entonces que si $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathrm{L}[\mathcal{U}]$ y $|X|^{\mathrm{L}[\mathcal{U}]} < \kappa$, hay un $Y \in \mathrm{L}[\mathcal{U}][C]$ con $X \subseteq Y$ y $|Y|^{\mathrm{L}[\mathcal{U}][C]} < \kappa$.

Asumamos $\mathrm{V} = \mathrm{L}[\mathcal{U}]$, $M = \mathrm{V}[C]$, para no estar indicando 'en L[$\mathcal{U}$]' en el resto del argumento.

Sea $X \subseteq \kappa$ t.q. si $Y \in M$, $X \subseteq Y$, entonces $|X| < |Y|$. Por supuesto, $|X| < \kappa$, así que hay un $Y' \in M$ con $\mu = |Y'|^M < \kappa$ y $X \subseteq Y'$. Si $g : \mu \to Y' \in M$ es una biyección, y $X' = g^{-1}``X$, $X' \subseteq \mu < \kappa$, así que hay un $Z \supseteq X'$ con $Z \in M$, $|Z| = |X|$. Si $Y = g``(Z \cap \mu)$, Y contradice que X sea testigo de $\neg\,\mathrm{CP}(M)$. Este argumento final es en esencia el de la afirmación luego del Lema 43. $\square_{(\mathrm{T47})}$

4. Extenders.

Kunen y Paris hacia el 70 consiguieron mostrar mediante forcing que si κ es medible, es consistente que tenga $\beth_2(\kappa)$ ultrafiltros normales. Esto contrasta abiertamente con el Teorema 46.a). Como esperamos sea claro para el lector que nos ha seguido hasta acá, los ultrafiltros normales son fundamentales en el estudio de los cardinales grandes. Una clasificación muy precisa de estos, en los primeros niveles luego de simplemente medibilidad proviene de considerar un orden sobre las medidas normales.

Def. 61. [Mitchell] Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son medidas normales sobre κ, $\mathcal{U} \lhd \mathcal{U}'$ sii $\mathcal{U} \in \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}')$.

Teorema 48. *$\lhd$ es un orden parcial bien fundamentado.*

Dem: Por Łoz, $\mathcal{U} \in \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}')$ sii $\exists X \in \mathcal{U}'$ t.q. hay una sucesión $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in X}$ con cada $\mathcal{U}_\alpha$ un ultrafiltro sobre α, y $\forall x \subseteq \kappa (x \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \{\, \alpha \in X : x \cap \alpha \in \mathcal{U}_\alpha \,\} \in \mathcal{U}')$.

Esta incómoda caracterización permite mostrar que $\lhd$ es transitivo. Para mostrar buena fundamentación supóngase que no se tiene, y sea κ el mínimo medible para el que esto pasa. Sea $(\mathcal{U}_n)_n$ $\lhd$-decreciente. En $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{U}_0)$ $(\mathcal{U}_n)_{n>0}$ es $\lhd$-decreciente, pero esto es una contradicción, pues hay $j(\kappa)$, con j la sumersión canónica, es el mínimo medible sobre el cual $\lhd$ no es bien fundamentado. $\square_{(\mathrm{T48})}$

Def. 62. Si κ es medible, $o(\kappa) = \{\, o(\mathcal{U}) : \mathcal{U}$ es normal sobre $\kappa \,\}$, donde

$$o(\mathcal{U}) = \{\, o(\mathcal{U}') : \mathcal{U}' \lhd \mathcal{U} \,\}.$$

Lema 61. *$o(\mathcal{U}) < (2^\kappa)^+$, de modo que $o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$.*

Dem: Si $g \in {}^\kappa\mathrm{V}$ es la función $\mu \mapsto o(\mu)$ ($o(\mu) = 0$ si μ no es medible), $[g]_\mathcal{U} = o(\mathcal{U})$, pues $\{\,\mathcal{U}' : \mathcal{U}' \lhd \mathcal{U}\,\} = \{\,\mathcal{U}' : \mathcal{U}'$ es normal sobre κ en $\mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U})\,\}$, luego $[g]_\mathcal{U} = o(\kappa)^{\mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U})} = o(\mathcal{U})$. De aquí es inmediato lo pedido. $\square_{(\mathrm{L61})}$

κ es medible sii $o(\kappa) \geq 1$, y no puede demostrarse que sea mayor, pero bajo hipótesis adicionales el máximo puede alcanzarse:

Lema 62. *Si κ es fuerte (def. 23), $o(\kappa) = (2^\kappa)^+$.* $\square_{(\mathrm{L62})}$

Ver [Ko]. El resultado se debe a Solovay, quien lo había mostrado para κ supercompacto, ver [KReSo]. Del argumento ahí se aprecia que también se tiene el resultado con κ $\mathcal{P}^2(\kappa)$-hipermedible.

Nos centraremos en la construcción de Core Models asociados al orden $\lhd$. La forma precisa de esta asociación se da a continuación. Omitiremos demostraciones y detalles.

Def. 63. Una *sucesión coherente* $\mathcal{F}$ es una función para la cual hay una función $o^\mathcal{F}$ de ordinales en ordinales, t.q.

a) $\mathrm{Dom}\,\mathcal{F} = \{\,(\alpha,\beta) : \beta < o^\mathcal{F}(\alpha)\,\}$.
b) $\mathrm{L}[\mathcal{F}] \models \forall\alpha,\beta \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{F}\,(\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ es una medida normal sobre α con $\lhd$-orden β.
c) Toda medida en $\mathrm{L}[\mathcal{F}]$ es alguna $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$.

Teorema 49. *Hay una sucesión coherente $\mathcal{F}$ con $o^\mathcal{F}(\kappa) = \mathrm{Inf}(o(\kappa), \kappa^{++\mathrm{L}[\mathcal{F}]})$ para todo ordinal κ.* $\square_{(\mathrm{T49})}$

Su resultado depende explícitamente de la teoría de ultrapotencias iteradas, y desarrolla una teoría de estructura fina para $\mathrm{L}[\mathcal{F}]$. $\mathrm{L}[\mathcal{F}]$ satisface GCH y, como $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$, no depende completamente del $\mathcal{F}$ inicial. Con ayuda del teorema Mitchell pudo mostrar que, p.ej., partiendo de las hipótesis apropiadas, es consistente tener $o(\kappa) = \alpha$ y $\lhd$ lineal. Esto vale en un modelo de la forma $\mathrm{L}[\mathcal{F}]$, o una ultrapotencia de este modelo, y α puede ser cualquier ordinal $\leq \kappa$, o κ^+ o κ^{++}. En estos modelos vale GCH también.

Observación. $\lhd$ no tiene que ser lineal, y se ha estudiado con gran detalle qué otros comportamientos puede presentar. Si P_κ denota la colección de medidas normales sobre κ, $\lhd$-ordenadas, Baldwin [B1] mostró que puede tener $P_\kappa \cong P$ para cualquier pre-buen orden P de tamaño $< \kappa$. $\langle P, < \rangle$ es un *pre-buen orden* sii hay una función $f : P \to \mathrm{ORD}$ tal que $\forall p,q \in P\,\big(p < q \longleftrightarrow f(p) < f(q)\big)$. Su demostración utiliza y extiende resultados de la teoría de Mitchell presentada en [Mi1].

Su trabajo fue generalizado por Cummings [Cu2,4]. En [Cu2] se usa forcing, y la teoría de [Mi4,6] para mostrar que pueden tenerse las medidas en P_κ divididas en bloques, los elementos de cada bloque incomparables entre sí, y estos pueden denotarse $M(\alpha,\beta)$, con $\alpha < o(\kappa)$, $\beta \in \big(\alpha, o(\kappa)\big)$ (o $\beta = \mathrm{ORD}$). Cada $M(\alpha,\beta)$ tiene tamaño κ^+ o κ^{++}, esto último sólo si $\beta = \mathrm{ORD}$, y $\forall\mathcal{U} \in M(\alpha,\beta)\,(o(\mathcal{U}) = \alpha)$. Además, si $\mathcal{U} \in M(\alpha,\beta)$ y $\mathcal{V} \in M(\gamma,\delta)$, $\mathcal{U} \lhd \mathcal{V}$ sii $\beta \subseteq \gamma$.

Su construcción es tan general que le permite sumergir en P_κ cualquier orden bien fundamentado en el que no se pueda sumergir el poset $K_{2,2}$ (el grafo ordenado bipartito completo de 2 familias de 2 vértices cada una). Baldwin y Cummings indican que sus técnixcas fallan definitivamente si $K_{2,2}$ se puede sumergir.

En su tesis de doctorado, Jiří Witzany (ver [Wi]), un estudiante de T. Jech, resolvió el problema parcialmente, mostrando que la restricción de Cummings es removible: Partiendo de un modelo de GCH con $o(\kappa) = \kappa^{++}$ (el máximo posible), y usando una función similar a la obtenida en la demostración de la Afirmación en el Teorema 55, capítulo 4, halla una extensión genérica que preserva GCH y cofinalidades en la que todo poset bien fundamentado de tamaño a lo más κ^+ se sumerge en P_κ.

La solución general, sin embargo, aun no se ve muy cercana, pues no se sabe si se puede remplazar sumersión por isomorfismo en el resultado de Witzany, o bajo qué hipótesis puede hacerse.

La generalización 'natural' de estos resultados le llevó a la formulación del concepto de cardinal hipermedible, y sus técnicas, simplificadas por Dodd y Jensen (ver [Do2]), condujeron a la definición de extender.

Los extenders codifican la información de una ultrapotencia sin necesidad de incluir el ultrafiltro asociado, sino —en cambio— aproximaciones. La motivación es buscar modelos $\mathrm{L}[\mathcal{A}]$ para supercompactos. La primera idea sería la generalización obvia: tomar $\mathrm{L}[\mathcal{U}]$, donde $\mathcal{U}$ es normal sobre, digamos, $[\kappa^+]^{<\kappa}$. Pero no es difícil establecer que $[\kappa^+]^{<\kappa} \cap \mathrm{L} \notin \mathcal{U}$, y por tanto $\mathrm{L}[\mathcal{U}] = \mathrm{L}$. Por eso se trabaja con aproximaciones.

No requeriremos en la siguiente sección más que de sucesiones coherentes, por lo que omitimos la definición técnica de extender. Estos dependen de dos ordinales κ y ν: $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_a : a \in [\nu]^{<\omega})$, donde cada $\mathcal{F}_a$ es un ultrafiltro normal sobre $\mathcal{P}(\kappa \times [\kappa]^{|a|})$, y con ellos se puede definir una sumersión $j : \mathrm{V} \to N = \{ j(f)(\kappa, a) : a \in [\nu]^{<\omega}, f : \kappa \times [\kappa]^{|a|} \to \mathrm{V} \}$. Puede irse más lejos, e introducir sucesiones *coherentes* de extenders. Mencionamos algunos de los resultados de teoría de core models que resultan:

Teorema 50. *Sea κ fuerte. Entonces hay un modelo interno con una sucesión coherente, $L[\mathcal{F}]$, donde κ aun es fuerte y $o^{\mathcal{F}}(\kappa) = \infty$.* $\square_{(\mathrm{T50})}$

Se define en este contexto un concepto más amplio de prerratón, para el cual también puede establecerse un resultado de comparación para prerratones iterables. Procediendo de manera similar a la construcción de K, pueden formarse modelos $\mathrm{K}[\mathcal{D}] \models \mathrm{V} = \mathrm{K}[\mathcal{D}]$, con $\langle \mathrm{K}[\mathcal{D}], \mathcal{D} \rangle$ sensible. $\mathrm{K}[\mathcal{D}]$ es un core model sii satisface que $\mathcal{D}$ es una sucesión coherente de extenders.

Teorema 51. *Suponga que no hay modelos internos con cardinales fuertes.*

a) *Si $K[\mathcal{F}]$ es un core model, $K[\mathcal{F}] \models GCH$.*

b) *(Algo informalmente) Hay una única sucesión $\mathcal{F}_{can}$ con $\mathcal{F}_{can} \subseteq K[\mathcal{F}_{can}]$, y si $\kappa \in ORD$ y $\nu = o^{\mathcal{F}_{can}}(\kappa)$, hay una sucesión $\mathcal{G}$ que coincide con $\mathcal{F}$ en un segmento inicial: $\mathcal{G} \restriction_{(\kappa,\nu)} = \mathcal{F}_{can} \restriction_{(\kappa,\nu)}$ y $(\kappa, \nu) \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{G}$. $K[\mathcal{F}_{can}]$ es un core model, el core model canónico.*

c) *Si κ es singular, $\kappa^+ = (\kappa^+)^{\mathrm{K}[\mathcal{F}_{can}]}$. Esto de hecho se sigue de una generalización del siguiente resultado:*

d) *[Lema de Cubrimiento de Mitchell] Si no hay modelos internos de $\exists\lambda\,(o(\lambda) = \lambda^{++})$, κ es singular, $N \prec H_\lambda$ ($\lambda \geq \kappa^+$ regular), ${}^{\omega}N \subseteq N$, $|N| < \kappa$ y $N \cap \kappa$ es cofinal en κ, entonces hay una función (de Skolem canónica) $h^N \in K[\mathcal{F}_{can}]$, un ordinal $\delta^N < |N|^+$ y una sucesión de indiscernibles C_N t.q. $N \cap H_\kappa \cap K[\mathcal{F}_{can}], N \cap$*

$\mathcal{P}(\kappa) \cap K[\mathcal{F}_{can}] \subseteq h^{N}``(\delta^N, C_N)$. Además, si N y N' son como acá, entonces $|\{c \in N \cap N' : c \in C_N \setminus C_{N'}\}| < \omega$, lo que da una especie de unicidad de las sucesiones de indiscernibles. $\square_{(\mathrm{T51})}$

Por último, los siguientes resultados pueden verse en [K]. Mencionamos acá que para las hipótesis de cardinales grandes, los extenders factorizan las sumersiones testigos que se tengan, como la sumersión asociada a un ultrafiltro normal factoriza una sumersión usual, que es una idea que hemos encontrado ya varias veces. Los extenders son definibles en primer orden, lo que formaliza los conceptos introducidos en el capítulo 0. De nuevo, [Ko] provee detalles de esto.

Teorema 52.

a) *κ es γ-fuerte sii hay un extender $\mathcal{F}$ en κ, $|V_{\kappa+\gamma}|^+$ t.q. si $j : V \xrightarrow{\prec} M$ es la sumersión asociada, $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ y $\gamma < j(\kappa)$.*

b) *κ es superfuerte sii hay un extender en κ, β para algún $\beta > \kappa$ t.q. si $j : V \xrightarrow{\prec} M$ es la sumersión asociada, $V_{j(\kappa)} \subseteq M$.*

c) *κ es Woodin sii $\forall f \in {}^{\kappa}\kappa \, \exists \alpha < \kappa$ con $f``\alpha \subseteq \alpha$ y un extender $\mathcal{F} \in V_\kappa$ t.q. si $j : V \xrightarrow{\prec} M$ es la sumersión asociada entonces $\operatorname{crit} j = \alpha$, $j(f)(\alpha) = f(\alpha)$ y*

$$V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M. \quad \square_{(\mathrm{T52})}$$

5. ¿Qué tan Fuerte es ¬SCH? (I).

Comenzamos aquí una discusión que terminaremos (con más detalles) el próximo capítulo. Queremos mostrar que $\mathrm{Con}(\neg\mathrm{SCH}) \iff \mathrm{Con}(\exists\kappa\,(o(\kappa) = \kappa^{++}))$. Acá mostraremos que al menos se requiere de la hipótesis a la derecha. Seguimos [Gi3] en nuestra rápida exposición.

Teorema 53. *[Gitik] Si $\kappa > 2^{\aleph_0}$ es singular de cofinalidad ω y $\mathrm{pp}(\kappa) > \kappa^+$, entonces*

a) *$o(\kappa) = \kappa^{++}$ en un modelo interno, o*

b) *Hay una cantidad no acotada de cardinales $\mu < \kappa$ t.q. hay un cardinal regular δ, límite de medibles en $K[\mathcal{F}_{can}]$, con $\mu^+ < \delta < \mu^\omega$.*

Corolario 21. $\mathrm{Con}(\neg SCH) \longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\kappa\,(o(\kappa) = \kappa^{++}))$.

Dem: Inmediato por el Teorema 44 en el capítulo 2. $\square_{(\mathrm{C21})}$

Dem: (Teorema 53) Sólo damos una idea: Por contradicción, hay una sucesión de regulares $(\kappa_n)_n$ con límite κ t.q. $\mathrm{tcf}(\prod_n \kappa_n, <_{\mathcal{D}}) = \kappa^{++}$, donde $\mathcal{D}$ es el filtro de los conjuntos de complemento acotado (Por el lema de cubrimiento de Mitchell, las sucesiones de indiscernibles que se considerarán serán únicas, en el producto reducido). Esto se sigue con un argumento similar a los del Corolario 18, y Gitik muestra cómo lograrlo con forcing sin alterar la validez del Teorema. Sea $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa^{++}}$ testigo de esto.

Gitik considera modelos como en el lema de cubrimiento de Mitchell, y sus funciones características $\chi^N(n) = \mathrm{Sup}(N \cap \kappa_n)$. La sucesión $(f_\alpha)_\alpha$ es remplazada por otros trestigos (*scales*) con más propiedades, primero por sucesiones de funciones características.

Luego hay 2 casos: Primero se asume que las sucesiones de indiscernibles asociados con estas funciones son *independientes*:

Si $(c_n)_n$ es una sucesión de indiscernibles, es independiente justo cuando $c_n \in (\kappa_{n-1}, \kappa_n)$ y el índice de la medida a la que pertenece (el β con $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{F}_{can}$ y c_n en la medida $\mathcal{F}_{can}(\alpha, \beta)$) no depende de $(c_0, \ldots, c_{n-1})$. Gitik muestra con forcing que esta situación es posible.

Si las sucesiones son independientes, puede contrase cuántas hay, y resulta que no sobrepasan κ^+. Esto lleva a contradicción, pues $o(\kappa) < \kappa^{++}$.

Si, en cambio, las sucesiones no son independientes, la situacón es más difícil. De nuevo, Gitik muestra por forcing que es posible. Entonces se 'diagonaliza' a las funciones características, obteniendo una nueva sucesión $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa^{++}}$. Para cada $\delta < \kappa^{++}$ con $\mathrm{cf}\,\delta = \kappa^+$ se construye una cota g^*_δ de $(g_\alpha)_{\alpha<\delta}$. Se analizan 3 posibilidades, según las propiedades de las g^*_δ. En cada caso, o bien κ es ω-inaccesible, y con esto se obtiene una κ^+-sucesión $<_{\mathcal{D}}$ cofinal en $\prod_n \kappa_n$, o bien se cumple la condición b) del teorema. $\square_{(\mathrm{T53})}$

6. Resultados Adicionales.

Hay muchísimo más que decir, aun sin incluir pruebas.

Mencionamos acá algunas cotas inferiores para diversas versiones de $\neg$SCH. Todas estas cotas se obtienen trabajando con core models, y usando versiones débiles del lema de cubrimiento. $o(\kappa) = \alpha$ para $\alpha > (2^\kappa)^+$ se refiere siempre a $o^{\mathcal{F}_{can}}$:

Teorema 54.

a) *[Gitik, Gi4] Si* $\alpha > 2$, $\mathrm{Con}(\exists\kappa \text{ medible}(2^\kappa = \kappa^{+\alpha})) \longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\kappa\, o(\kappa) = \kappa^{+\alpha})$.

b) *[Mitchell, Mi9] Si* $\mathrm{cf}\,\kappa > \omega$, *$\kappa$ singular límite fuerte, y* $2^\kappa > \kappa^+$, *en un core model* $o(\kappa) = \kappa^{++}$. *Esto complementa el resultado de Gitik en la sección anterior.*

c) *[Gitik-Mitchell, GiMi] Si κ es singular límite fuerte y* $2^\kappa \geq \lambda$, *donde λ no es el sucesor de un cardinal de cofinalidad a lo más κ, entonces si* $\mathrm{cf}\,\kappa > \omega$ $o(\kappa) \geq \lambda$, *y si* $\mathrm{cf}\,\kappa = \omega$, $o(\kappa) \geq \lambda$ *o* $\{\alpha : K[\mathcal{F}_{can}] \models o(\alpha) \geq \alpha^{+n}\}$ *es cofinal en* κ $\forall n$. *La construcción acá requiere de generalizaciones de los conceptos en la sección 4, ver [MiSt] y [St].*

d) *[GiMi] Si* $2^\omega < \aleph_\omega$ *y* $2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega_1}$ *hay un sostenido para un modelo interno con un cardinal fuerte. Este resultado requiere de la teoría de* pcf. $\square_{(\mathrm{T54})}$

Finalizamos el capítulo con una pregunta abierta:

Pregunta 5. ¿Existen core models para todas las hipótesis de cardinales grandes (h.c.g.) estudiadas hasta ahora? En caso positivo, para una definición razonable de h.c.g., si P es una h.c.g., ¿Hay un metateorema que asegure que de $\mathrm{Con}(P)$ se sigue la de la existencia de un core model donde valga P? En caso negativo, ¿Cuál es la cota superior de las hipótesis para las que hay core models?

Capítulo 4

Forcing

> **Por increible que parezca, yo creo que hay (o que hubo) otro Aleph, yo creo que el Aleph de la calle Garay era un falso Aleph.**
>
> (Jorge Luis Borges, *El Aleph*, (1949).)

Este capítulo es básicamente una enumeración de los resultados que por medio de forcing se han obtenido en los últimos 20 años sobre el comportamiento de la exponencial. Estos son resultados profundos y difícilmente podremos transmitir su alcance con éxito en tan corto espacio. Sólo daremos ideas de las demostraciones.

1. Forcing de Radin, Supercompactos y Ultrafiltros.

El objeto de esta sección es presentar una serie de resultados y técnicas que emplearemos luego en las construcciones.

Comenzamos con el teorema principal de [L].

Teorema 55. *[Laver] Sea κ supercompacto. Hay un poset $\mathbb{P}$ de cardinalidad κ y κ-cc, t.q. forcing con $\mathbb{P}$ preserva la supercompacidad de κ y, si $\dot{\mathbb{Q}}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un poset κ-cerrado,*

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbf{i}_{\dot{\mathbb{Q}}} \Vdash_{\dot{\mathbb{Q}}} \kappa \texttt{ es supercompacto.}$$

Valen diversas versiones. Por ejemplo, dado $\eta < \kappa$ puede conseguirse que $\mathbb{P}$ sea η-dirigido cerrado, y que en la extensión la supercompacidad de κ se preserve bajo nociones κ-dirigidas cerradas de forcing.

Dem: Seguimos [KMa] sección 25. Generalizando nuestro Lema 11.a. para κ supercompacto, es fácil mostrar que $\forall\lambda\,\forall A\,\exists f \in {}^{\kappa}V\,\exists j : V \xrightarrow{\prec} M\,(\mathrm{crit}\, j = \kappa, {}^{\lambda}M \subseteq M$ y $j(f)(\kappa) = A)$. Lo importante acá es que la supercompacidad permite invertir el orden de los cuantificadores:

Afirmación. *Si κ es supercompacto, hay una función $\ell : \kappa \to V_\kappa$ t.q. $\forall A \in V$ y $\forall\lambda$ cardinal existen un $\lambda' > \lambda$ y una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ testigo de la λ'-supercompacidad de κ tales que $j(\ell)(\kappa) = A$.* $\square_{(\mathrm{Af})}$

Esta afirmación tiene interés por sí misma. En [FMaSh1], p. ej., se usa para construir un forcing iterado con el que se muestra, módulo la consistencia de un supercompacto, la consistencia de una versión 'maximal' del axioma de Martin, algunas de cuyas consecuencias mencionaremos en el próximo capítulo.

Fijemos ℓ como en la afirmación. Puede construirse una iteración de κ pasos $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\kappa$: Para $\alpha < \kappa$, sea $\mathbb{P}_\alpha = \{p.\restriction_\alpha : p \in \mathbb{P}_\kappa\}$; en la notación de la def. 26, sea $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ un nombre para $\ell(\alpha)$ si $\mathbf{1}_\alpha$ fuerza que $\ell(\alpha)$ es un poset α-cerrado y $|\mathbb{P}_\alpha| = \alpha$, o la noción vacía ($\{0\}$) en otro caso. $\mathbb{P}_\kappa$ es el límite directo de la iteración, y en etapas límite se toman límites directos o inversos (forcing de tipo Easton inverso) como en el Teorema 32, de Silver.

La demostración de Laver sigue la idea de este teorema, una vez se establece que $\mathbb{P}$ preserva supercompacidad: Si $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{Q}}$ **es κ-cerrado**, sea $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ con $j(\ell)(\kappa) = \dot{\mathbb{Q}}$. Como antes, $\mathbb{P}$ extiende a $j(\mathbb{P}) = \mathbb{P} * \dot{\dot{\mathbb{P}}}$ en M, y ahí $j(\mathbb{P})_{\kappa+1} = \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre V y $j^* : \mathrm{V}[G] \xrightarrow{\prec} M[H]$ extiende a j, como en el Teorema 24, si j es suficientemente cerrado (i.e., ${}^{\lambda}M \subseteq M$ para λ grande), forzando desde $M[H]$ se preserva la suficiente supercompacidad de κ, y esto se transfiere a $\mathrm{V}[G]$. Variando M (i.e., λ), se tiene lo querido. $\square_{(\mathrm{T55})}$

El resultado de Laver ha sido muy empleado en problemas de independencia que involucren cardinales supercompactos. Algunas aplicaciones pueden verse en [Sh3] caps. VII y X. En este capítulo mostraremos otros ejemplos de su uso, más relevantes para nuestro propósito.

Def. 64. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I es (κ, λ)-*regular*, $\kappa \geq \lambda$, sii hay conjuntos $A_\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha \in \kappa$, t.q. si $X \in [\kappa]^\lambda$, $\bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha = \emptyset$. $\mathcal{U}$ es *regular* sii es $(|I|, \omega)$-regular.

Keisler introdujo el concepto de regularidad, del que el dado es una generalización. Trataremos con ultrafiltros *no* regulares en la siguiente sección, y volveremos a hallarlos en el próximo capítulo, sección 4. Es 'fácil' hallar ultrafiltros regulares. Por ejemplo, si $|I|$ es menor que el primer medible, $\mathcal{U}$ es (ω, ω)-regular sii es no principal. La existencia de ultrafiltros no regulares, aun en cardinales 'pequeños', requiere cardinales grandes (siendo para $|I| = \kappa^+$ la no (κ^+, κ)-regularidad el peor grado que se puede alcanzar). Kanamori, Magidor y Gitik, entre otros, han encontrado resultados al respecto.

Su mención aquí se debe al siguiente lema, básico para [Ma2]:

Lema 63. *Si es consistente tener un supercompacto y un huge mayor que él, también es consistente tener un supercompacto κ y un debilmente inaccesible λ t.q.*

a) $2^\kappa = \lambda^+$.
b) *Hay un $\alpha \in [\kappa, \kappa^+)$ para el cual existe un ultrafiltro fino (ver def. 20), κ-completo sobre $[\lambda]^\alpha$ que no es (λ, κ)-regular. Acá, $[\lambda]^\alpha = \{ X \subseteq \lambda : \mathrm{otp}(X) = \alpha \}$.*

Dem: Recuérdese que μ es huge sii $\exists j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ con $\mathrm{crit}\, j = \mu$ y ${}^{j(\mu)}M \subseteq M$. Esto es equivalente a tener un ultrafiltro normal μ-completo sobre $\mathcal{P}(\lambda)$ para algún $\lambda > \mu$: En una dirección, tómese $\lambda = j(\mu)$ y $\mathcal{U} = \{ X \subseteq \mathcal{P}(\lambda) : j``\lambda \in j(X) \}$. Para este $\mathcal{U}$, casi todos sus elementos tienen tipo de orden μ. Supongamos que μ es el menor huge $> \kappa$, κ supercompacto. λ es inaccesible. Por el Teorema 55 (y el Corolario 6), s.p.d.g. la supercompacidad de κ se mantiene bajo nociones de forcing κ-cerradas. Forcemos con $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda^+)$. Como κ es inaccesible, $2^{<\kappa} = \kappa$, y en el modelo obtenido, V_1, $2^\kappa = \lambda^+$ y λ es debilmente inaccesible. Puede mostrarse que en V_1 $\mathcal{U}$ genera un filtro $\mathcal{U}_1$, fino, μ-completo y *debilmente* normal (si f es regresiva, es acotada $\mathcal{U}_1$-c.s.). En V_1, fuércese con $\mathrm{Coll}(\kappa, \mu^+)$, y sea V_2 el modelo obtenido. En V_2, como $(\mu^{<\kappa} = \mu)^{\mathrm{V}_1}$, puede mostrarse que $\mathcal{U}_1$ se extiende a $\mathcal{U}_2$, un filtro fino κ-completo debilmente normal. Como $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda^+) * \mathrm{Coll}(\kappa, \mu^+)$ es κ-cerrado, κ es supercompacto en V_2, y no es difícil ver que $2^\kappa = \lambda^+$. $\mathcal{U}_2$ se puede extender al ultrafiltro querido, y de hecho todo ultrafiltro (que resulte de la forma $[\lambda]^\alpha$ con α como en el enunciado, $\mathrm{cf}\, \alpha = \kappa$) sirve:

En efecto, si $\mathcal{F}$ es cualquier filtro fino debilmente normal sobre $[\lambda]^\alpha$, donde λ es regular y $\operatorname{cf}\alpha = \kappa$, y $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, cualequiera κ de los cuales tienen intersección vacía, s.p.d.g. —$\mathcal{F}$ es fino— $\beta \in P \forall P \in A_\beta$. Sea entonces $G(P) = \{\beta \in P : P \in A_\beta\}$ para $P \in [\lambda]^\alpha$. $|G(P)| < \kappa$, así que $G(P)$ es acotado en P y podemos tomar $\alpha_P \in P$ mayor que todos los elementos de $G(P)$. Como $\mathcal{F}$ es debilmente normal, hay un $\beta < \lambda$ con $B = \{P : \alpha_P \leq \beta\} \in \mathcal{F}$. Si $P \in B \cap A_{\beta+1}$, $\beta + 1 \in G(P)$, y esto contradice $P \in B$, así que $B \cap A_{\beta+1} = \emptyset$, pero esto contradice que $A_{\beta+1} \in \mathcal{F}$. $\square_{(L63)}$

Otra aplicación del Teorema 55 es el siguiente resultado de [CuSh]:

Lema 64. *Si hay n cardinales supercompactos κ_i, $i < n$, en V, hay una noción de forcing $\mathbb{P}$ que hace la supercompacidad de κ_i indestruible bajo forcings κ_i-dirigidos cerrados, $\forall i < n$.*

Dem: S.p.d.g. $\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_{n-1}$. Sea $\mathbb{P}_0$ el forcing de Laver para preservar la supercompacidad de κ_0. $\mathbb{P}_0$ fuerza que κ_i $(0 < i < n)$ es aun supercompacto, pues $|\mathbb{P}_0| < \kappa_i$. Sea $\dot{\mathbb{P}}_1$ un $\mathbb{P}_0$-nombre para el forcing de Laver que preserva la supercompacidad de κ_1, y es κ_0-dirigido cerrado; como se mencionó luego del enunciado del Teorema 55 esto es posible. $\mathbb{P}_0 * \dot{\mathbb{P}}_1$ preserva la supercompacidad de κ_i para $1 < i < n$ por cardinalidad, de κ_1 por construcción, y de κ_0 por definición de $\mathbb{P}_0$. Además, si $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \mathtt{i}_{\dot{\mathbb{P}}_1} \Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_1}$ $\dot{\mathbb{Q}}$ `es` κ_0`-dirigido cerrado`, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \dot{\mathbb{P}}_1 * \dot{\mathbb{Q}}$ `es` κ_0`-dirigido cerrado`.
La construcción continúa de igual forma, por inducción. $\square_{(L64)}$

Presentamos ahora una noción de forcing que se ha convertido en herramienta esencial de los argumentos sobre exponencial de cardinales grandes, como puede verse en la sección 4 (en verdad, los resultados mencionados en tal sección usan variaciones de la construcción que detallaremos).

a. Forcing de Radin.

Generalizaremos acá la construcción de Prikry, cap. 1, sección 4.*b*: Queremos, para κ un cardinal grande, agregar sucesiones cerradas cofinales en κ, sin destruir su carácter de cardinal grande. Esto es posible en varios casos, gracias al trabajo doctoral de Lon B. Radin, en el 80. Seguimos su artículo [R], pero no presentaremos pruebas.

Antes de comenzar, nótese la siguiente propiedad del forcing de Prikry: Con la notación del Lema 34, si $\mathbb{P}_\mathcal{U}$ es el forcing de Prikry y G es genérico, $x^G = \bigcup\{s : \exists A\,((s, A) \in G)\}$ es cofinal en κ. Nótese que G es recuperable a partir de x^G: $G = \{(s, A) \in \mathbb{P}_\mathcal{U} : s \text{ es segmento inicial de } x^G \text{ y } x^G \setminus s \subseteq A\}$ (ver [K]). De la misma forma, si $y \subseteq x^G$ es cofinal, es genérico en el sentido de que permite recobrar G. Esto fue demostrado por Mathias, hacia el 73, mediante un argumento combinatorio que involucra de nuevo al Lema 12 (Mathias mostró que x es $\mathbb{P}_\mathcal{U}$-genérico sii $\forall X \in \mathcal{U}\,(|x \setminus X| < \omega)$). El forcing de Radin tiene una propiedad similar: las subsucesiones cerradas cofinales de una sucesión genérica permiten construir genéricos.

El forcing de Radin es más complicado que el de Prikry, pues no sólo agrega sucesiones de ordinales, sino de filtros. Comencemos con κ $\mathcal{P}^3(\kappa)$-hipermedible, y sea $j : V \xrightarrow{\prec} M$ un testigo: $\operatorname{crit} j = \kappa$, ${}^\kappa M \subseteq M$, $V_{\kappa+3} \subseteq M$.

Def. 65. $k_0 = \kappa$, $k_\alpha = \{A \subseteq \mathrm{V}_\kappa : k_{<\alpha} \in j(A)\}$ $(\alpha > 0)$. Acá, $k_{<\alpha} = (k_\delta)_{\delta<\alpha}$. Nótese que k_α, $\alpha > 0$, es un ultrafiltro sobre V_κ.

Como $\mathcal{P}^3(\kappa) \subseteq M$, M contiene toda sucesión de menos de $\beth_2(\kappa)^+$ ultrafiltros sobre $\mathrm{V}_{\kappa+3}$. Como sólo hay $\beth_2(\kappa)$ de ellos, k_α está definido $\forall\alpha < \beth_2(\kappa)^+$, y existen $\lambda_0 < \lambda_1 < (2^{2^\kappa})^+$ con $k_{\lambda_0} = k_{\lambda_1}$. Las propiedades de preservación del forcing dependen fuertemente de este hecho. Mitchell, mediante una variación del argumento, obtuvo tales resultados comenzando con un $\mathcal{P}^2(\kappa)$-medible.

Def. 66. Sea $\mathcal{U} = \{u_{<\alpha} : u_{<\alpha}$ es una sucesión de tamaño $\alpha < \beth_2(u_0)^+$, $u_0 \in \mathrm{ORD}$ y u_δ es un ultrafiltro sobre V_{u_0} para $\delta \in (0,\alpha)\}$ (p. ej., $k_{<\alpha} \in \mathcal{U}$). $\mathcal{U}$ es la colección de las *sucesiones de medidas*.

a) $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ es *corta* si $\alpha < u_0$. De otro modo es *larga*.

b) Si $A_{<\alpha}$ es una α-sucesión y $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$, $A_{<\alpha}$ es *grande* en $u_{<\alpha}$ sii $A_0 = 0$ y $\forall\delta \in (0,\alpha)\,(A_\delta \in u_\delta)$.

c) Si $A^i_{<\alpha_i}$ es grande en $u^i_{<\alpha_i}$, $i \in 2$, $(A^0_{<\alpha_0}, u^0_{<\alpha_0})$ es una *sombra* de $(A^1_{<\alpha_1}, u^1_{<\alpha_1})$ sii $u^0_{<\alpha_0} \in A^1_\delta$ para algún $\delta < \alpha_1$ y $A^0_\beta \subseteq A^1_\gamma\, \forall\beta < \alpha_0$ para algún $\gamma < \alpha_1$. Ser 'sombra de' es transitivo. Si $f : \alpha_0 \to \alpha_1$ envía β en γ como acá, f es un *testigo de la sombra*. Un ejemplo puede ser $f(\beta) =$ menor γ con $A^0_\beta \subseteq A^1_\gamma$.

d) Si $B_{<\beta}$ es grande en $v_{<\beta}$ y $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$, $u_{<\alpha}$ *puede adicionarse* a $(B_{<\beta}, v_{<\beta})$ sii $(A_{<\alpha}, u_{<\alpha})$ es sombra de $(B_{<\beta}, v_{<\beta})$ para algún $A_{<\alpha}$ grande en $u_{<\alpha}$.

Lema 65. *Los $k_{<\alpha}$ cumplen las siguientes propiedades (que, de paso, definimos):*

i) *[Coherencia] $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ tiene la propiedad i sii para todo $\delta \in (0,\alpha)$ y $A_{<\alpha}$ grande en $u_{<\alpha}$ hay un $A \in u_\delta$ t.q. si $v_{<\beta} \in A$ y $\beta' < \beta$, $v \restriction_{\beta'} \in A_{\alpha'}$ para algún $\alpha' < \alpha$.*

ii) *[Normalidad] $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ tiene la propiedad ii sii*

$$\forall\gamma < \alpha\, \forall f : u_0 \to u_\gamma\, (\{v_{<\beta} : \forall\delta < v_0\, (v_{<\beta} \in f(\delta))\} \in u_\gamma).$$

iii) *[Existencia de Sombras] $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ tiene la propiedad iii sii para todo $A_{<\alpha}$ grande en $u_{<\alpha}$ y $\gamma \in (0,\alpha)$ hay un $A \in u_\gamma$ t.q. si $v_{<\beta} \in A$*

$$\exists f \in {}^\beta\alpha\, \forall\delta \in (0,\beta)\, (V_{v_0} \cap A_{f(\delta)} \in v_\delta).$$

iv) *$u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ tiene la propiedad iv sii $0 < \gamma < \gamma' < \alpha$ y $A \in u_\gamma$ implican que hay un $A' \in u_{\gamma'}$ t.q. si $v_{<\beta} \in A'$ entonces $A \cap V_{v_0} \in v_\delta$ para algún $\delta \in \beta$.*

v) *$u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ tiene la propiedad v sii $\forall\gamma \in (0,\alpha)$, si $\gamma \in u_0$ entonces*

$$\{v \in \mathcal{U} : v \text{ es corta y } \mathrm{Dom}\, v = \gamma\} \in u_\gamma,$$

y si no entonces

$$\{v \in \mathcal{U} : v \text{ es larga}\} \in u_\gamma. \quad \square_{(\mathrm{L65})}$$

Por ejemplo, j sirve de testigo en iii).
Estamos listos para definir el forcing.

Def. 67. $\mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$, para $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$, es la noción de forcing dada por: $p \in \mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$ sii $p = (\vec{A}, \vec{u})$, donde $\vec{A}$ y $\vec{u}$ son $(n+1)$-sucesiones $(n \in \omega)$ t.q. si $m \leq n$,

1) $u_m \in \mathcal{U}$, A_m es grande en u_m y u_m tiene las propiedades i–v.
2) Si $\delta < \operatorname{Dom} u_m$ y $v \in A_{m\delta}$, v tiene las propiedades i–v y si $\delta < u_{m0}$, v es corta y tiene dominio δ. En otro caso es larga.
3) Si $m < n$, $u_{m0} < u_{(m+1)0}$ y $A_{(m+1)\delta} \cap \mathrm{V}_{u_{m0}} = 0$ para todo $\delta \in \operatorname{Dom} u_{m+1}$.
4) $u_n = u_{<\alpha}$.

Sean $p = (A_0, A_1, \ldots, A_n, u_0, \ldots, u_n)$, $q = (B_0, \ldots, B_m, v_0, \ldots, v_m)$. $p \leq q$ sii

1) Todo v_i es un u_j, y en tal caso $A_{i\delta} \subseteq B_{j\delta}\, \forall \delta \in \operatorname{Dom} u_i$.
2) Si u_i no es un v_j, (A_i, u_i) es sombra de (B_j, v_j) para el primer v_j con $v_{j0} > u_{i0}$.

Es fácil ver que $\leq$ es transitivo. $\mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$ no siempre está bien definido. Se requiere para eso que $u_{<\alpha} \in \mathcal{U}$ tenga las propiedades i–v y que haya un $A_{<\alpha}$, grande en $u_{<\alpha}$ t.q. si $\delta < \alpha$ y $v \in A_\delta$, v tiene las propiedades i–v. Los $k_{<\alpha}$ muestran que esto es posible.

Hemos presentado la definición en detalle en esta ocasión; en las secciones siguientes encontraremos nociones tan o más complicadas, y entonces sólo daremos un bosquejo de su definición.

Sea G $\mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$-genérico, y σ una enumeración de $\{ v \in \mathcal{U} : v$ es algún u_i de algún $p \in G \}$. Si $p \in \mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$ y $v \in \mathcal{U}$, digamos que v se puede *agregar* a p sii puede adicionarse a (A_i, u_i), donde u_i es el primero en p con $u_{i0} > v_0$.

Puede mostrarse que $G = \{ p \in \mathbb{P}_{u_{<\alpha}} : \forall \delta \in \operatorname{Dom} \sigma\, (\sigma_\delta$ aparece en p o puede agregársele$) \}$. Así, G y σ son interdefinibles. Sea

$$\begin{aligned} \tau : \operatorname{Dom} \sigma &\longrightarrow u_0 + 1 \\ \delta &\longmapsto \sigma_{\delta 0} \end{aligned}.$$

En general (y puede precisarse en qué sentido) $\mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$ fuerza que τ enumera una sucesión cerrada de ordinales, cofinal en $u_0 + 1$, con tipo de orden $\min(\omega^{-1+\alpha}, u_0) + 1$ (la exponenciación es ordinal). Por eso la diferencia entre corta y larga. Si $u_{<\alpha}$ es larga, el 'daño' causado por el forcing será menor. Si $\alpha = 2$, esto se reduce al forcing de Prikry.

Def. 68. $N_{u_{<\alpha}} = (A_{<\alpha}, u_{<\alpha}) \in \mathbb{P}_{u_{<\alpha}}$ es la condición con $A_0 = 0$ y $A_\delta = \{ v \in \mathrm{V}_{u_0} \cap \mathcal{U} : v$ tiene las propiedades i–v y v es corta y $\operatorname{Dom} V = \delta$, si $\delta < u_0$, o es larga en otro caso$\}$ para $\delta \in (0, \alpha)$.

Si $u_{<\alpha}$ es larga, $N_{u_{<\alpha}}$ es la condición trivial. El sentido de la afirmación pasada es el siguiente

Lema 66. $N_{u_{<\alpha}} \Vdash \dot{\tau}$ enumera una sucesión cerrada cofinal en $u_0 + 1$, con tipo de orden $\omega^{-1+\alpha} + 1$ si $u_{<\alpha}$ es corta y $u_0 + 1$ si es larga. $\square_{(L66)}$

La demostración es por inducción. Una vez establecido el lema, el resultado importante respecto al forcing de Radin es el siguiente

Teorema 56. *Sea $j : V \xrightarrow{\prec} N$ testigo de que κ es $\mathcal{P}^3(\kappa)$-medible. Genérese $(k_\alpha)_\alpha$ como en la definición 65 y sean $k_{\lambda_0} = k_{\lambda_1}$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$. Si σ es $\mathbb{P}_{k_{<\lambda_1}}$-genérico sobre V,*

$$V[\sigma] \models \kappa \text{ es medible, y hay una 'extensión' de } k_1 \text{ que lo demuestra.}$$

Si j muestra que κ es λ-supercompacto, y $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro sobre $[\lambda]^{<\kappa}$ asociado,

$$V[\sigma] \models \kappa \text{ es } \lambda\text{-supercompacto y hay una extensión de } \mathcal{U} \text{ que lo demuestra.} \quad \square_{(T56)}$$

La definición de Mitchell es algo diferente, y se han estudiado las relaciones entre ambas. Mitchell utiliza una sucesión coherente de medidas. En [Cu3] se muestra cómo recobrar el forcing de Radin partiendo de una sucesión coherente de extenders. Se hace en dicho artículo un estudio detallado de la interrelación entre ambos conceptos, lo que le permite a Cummings construir una noción más general. Sus resultados son válidos para sucesiones de extenders que generen core models 'pequeños' (para cardinales menores que un cardinal fuerte).

b. El Orden de Rudin-Keisler.

En investigaciones topológicas (sobre P-puntos), antes del trabajo de Mitchell con sucesiones normales de medidas sobre κ, y de $\triangleleft$, Walter Rudin (1956) introdujo tipos de ultrafiltros (sobre ω) y un orden asociado. Hacia el 67 Keisler exploró sus propiedades, en relación con teoría de modelos. Para un estudio cuidadoso del orden de Rudin-Keisler, ver [ComN] caps. IX y siguientes. Nosotros sólo requeriremos de los conceptos básicos.

Def. 69. Sea κ un cardinal. El *(pre)orden de Rudin-Keisler* sobre los ultrafiltros sobre κ es la relación $\preccurlyeq$ dada por $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ sii

$$\exists f \in {}^{\kappa}\kappa \, \forall A \subseteq \kappa \, (A \in \mathcal{U} \text{ sii } f^{-1}(A) \in \mathcal{V}).$$

Es fácil ver que $\preccurlyeq$ es transitiva. Los *tipos* definidos por Rudin son las clases resultantes bajo la relación $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ sii $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$. Para $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, sea $\tau(\mathcal{U})$ su tipo.

Los siguientes resultados son sencillos:

- *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre κ. $|\tau(\mathcal{U})| \leq 2^\kappa$, $|\{\tau(\mathcal{V}) : \tau(\mathcal{V}) \preccurlyeq \tau(\mathcal{U})\}| \leq 2^\kappa$, y hay 2^{2^κ} tipos distintos. De hecho, $|\{\tau(\mathcal{V}) : \tau(\mathcal{U}) \preccurlyeq \tau(\mathcal{V})\}| = 2^{2^\kappa}$.* $\square_{(\bullet)}$

Hay diversas caracterizaciones para los ultrafiltros en los $\preccurlyeq$-primeros tipos; ver [ComN].

La relación entre $\preccurlyeq$ y $\triangleleft$ ha sido ampliamente estudiada: Por Gitik, especialmente bajo la suposición $\neg\exists\kappa\,(o(\kappa) = \kappa^{++})$, por Kanamori y por Mitchell. Ver, p. ej., [Mi6].

Nuestro interés en el orden $\preccurlyeq$ no es topológico, sino debido a [GiMa1]. Seguimos su exposición: Supongamos que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son ultrafiltros normales sobre κ, medible, y que tomamos el producto de los 2 forcings de Prikry asociados. Obtenemos 2 sucesiones $(\alpha_n)_n$ y $(\beta_n)_n$ cofinales en κ, en general distintas, de modo que $\{n : \alpha_n < \beta_n\}$ es un nuevo subconjunto de ω, así que estamos introduciendo nuevos subconjuntos acotados de κ, lo que en general colapsa cardinales, aunque cada noción por aparte no lo hace. Gitik y Magidor buscan evitar estos colapsos 'acoplando' las sucesiones, y para eso utilizan el orden $\preccurlyeq$:

Supongamos que $f \in ({}^{\kappa}\kappa)^{V}$ es tal que $f(\alpha_n) = \beta_n \, \forall n$. Entonces f es testigo de que $\mathcal{U}_2 \preccurlyeq \mathcal{U}_1$ —$\{\alpha_n\}_n$ es la sucesión asociada con $\mathcal{U}$, y $\{\beta_n\}_n$ la asociada con $\mathcal{U}_2$—, lo cual es fácil de ver usando, p. ej., la caracterización de Mathias de sucesión genérica mencionada al comienzo de *a*. Podemos ver a f como una proyección de $\mathcal{U}_1$ en $\mathcal{U}_2$.

La idea de [GiMa1], que conduce al concepto de sistema preciso de ultrafiltros, que introduciremos en la siguiente sección, es tomar un sistema dirigido $\langle(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha<\lambda}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\prec\beta}\rangle$, donde $\alpha \prec \beta$ sii $\mathcal{U}_\beta \preccurlyeq \mathcal{U}_\alpha$, en cuyo caso $f_{\beta\alpha}$ es un testigo (que genere un sistema conmutativo), y forzar una sucesión $(\beta_n(\alpha))_n$ de Prikry en cada $\mathcal{U}_\alpha$ t.q. $\alpha \prec \gamma$ implica $\beta_n(\alpha) = f_{\gamma\alpha}(\beta_n(\gamma))$ para casi todo n (i.e., eventualmente).

La definición final será, sin embargo, bastante más elaborada.

2. Violando SCH en $\aleph_\omega$.

Ya en el capítulo 1 vimos cómo, por forcing, puede violarse SCH comenzando con un medible, que luego volvíamos un contraejemplo. Pero una falla podía llegar mucho antes.

Magidor, hacia 1976, mostró que incluso puede llegar en el menor candidato posible: $\aleph_\omega$. Su demostración usaba de manera importante esta peculiaridad, por lo que sus generalizaciones a cardinales mayores estaban limitadas. También presenta el problema de que no establece qué tan lejos puede llegarse.

Teorema 57. *[Magidor]*

a) *Supongamos que existe un cardinal supercompacto. Entonces, $\forall n \leq \omega$, es consistente que $\aleph_\omega$ sea límite fuerte y que $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+n+1}$.*

b) *Más generalmente, si κ es supercompacto, $\beta < \kappa$ es un ordinal límite, y γ es bueno para β (ver abajo) en V, hay una extensión genérica V[G] donde $\aleph_\beta$ es límite fuerte y $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+\gamma}$. Si $|\beta| < \aleph_{|\beta|}$, puede además suponerse que en V[G] no hay nuevos subconjuntos de β.*

Éste es el resultado principal de [Ma1].

Def. 70. Sea β un ordinal límite. Una *partición aditiva* de β consta de una sucesión no decreciente de ordinales no nulos $(\delta_\alpha)_{\alpha<\rho}$ y de un ordinal μ t.q. ρ es límite, $\mu, \delta_\alpha < \beta\,\forall\alpha < \rho$, y

$$\beta = \mu + \sum_\alpha \delta_\alpha,$$

donde la suma es ordinal.

El *calibre* de tal partición es $\operatorname{Sup}_\alpha \delta_\alpha$.

γ es *bueno* para β sii es un ordinal sucesor menor o igual que el sucesor del calibre de alguna partición aditiva de β.

Por ejemplo, si β es regular, todo sucesor $\gamma \leq \beta + 1$ es bueno; si $\beta = \omega_1 + \omega$, el máximo ordinal bueno es $\omega + 1$.

Corolario 22.

a) *Es consistente la negación de la conjetura de Tarski.*

b) *La función exponencial y la cofinalidad no determinan la función gimel.*

a) hace referencia al comentario en el capítulo 2 luego de la demostración del Teorema 41. b) muestra que el 'recíproco' del resultado de Bukovský en la sección 2 del capítulo 0 es falso. b) fue demostrado originalmente por Jech, en el 74.

Dem: a) En la parte b) del teorema asúmase GCH en V y tómese $\beta = \omega_1+\omega_1$, $\gamma = \omega+2$. En el modelo obtenido, $\aleph_{\omega_1+\omega_1}$ es límite fuerte y $\aleph_{\omega_1+\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1+\omega_1+\omega+2}$. El forcing no afecta GCH por encima de $\aleph_{\omega_1+\omega_1}$ y $\aleph_{\omega_1+\omega_1+\omega}$ es límite fuerte en la extensión, así que ahí vale $\aleph_{\omega_1+\omega_1+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1+\omega_1+\omega+1}$. Luego,

$$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} < \aleph_\beta^{\aleph_1}.$$

Pero en la demostración del Teorema 41 se vio cómo construir un contraejemplo a la conjetura a partir de esta condición.

b) De nuevo asumamos GCH en V. Con $\mathrm{Add}(\aleph_1, \aleph_{\omega+2})$ hacemos $2^{\aleph_1} = \aleph_{\omega+2}$ sin introducir nuevas sucesiones contables. Entonces GCH vale en la extensión, excepto porque $2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+2}$ para $1 \leq n \leq \omega$. Como en V $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega + 1$, no se colapsan cardinales, y no hay más ω-sucesiones, en la extensión $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$.

Si, en cambio, en la parte a) del teorema tomamos $n = 2$, y luego forzamos $2^{\aleph_1} = \aleph_{\omega+2}$, ahora $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+2}$, y la exponencial es como en el modelo del párrafo anterior. $\square_{(C22)}$

Cabe hacer notar que nosotros supusimos GCH, mientras que el teorema no lo requiere.

Dem: (Teorema 57) Veamos un bosquejo corto de la parte a), con $n < \omega$. Queremos un modelo con $\aleph_\omega$ límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+n}$. En el capítulo 1, antes de la demostración del Teorema 32, en el que comenzábamos con κ κ^{++}-supercompacto, comentamos que κ^+-supercompacidad bastaba. Con la hipótesis que tomamos podía obtenerse no sólo κ medible, sino incluso κ^+-supercompacto. En la situación actual, partiendo de un supercompacto κ podemos suponer que tenemos $2^\kappa = \kappa^{+n}$ y κ aun $\kappa^{+(n-1)}$-supercompacto (asumimos $n \geq 2$; el caso $n = 2$ corresponde al Teorema 32).

El forcing de Magidor generaliza el de Prikry: va a cambiar la cofinalidad de

$$\kappa, \kappa^{+1}, \ldots, \kappa^{+(n-1)},$$

simultaneamente, a ω, de modo que $(\kappa^+)^{\mathrm{V}[G]} \geq (\kappa^{+n})^{\mathrm{V}}$ para G genérico. Además, hará $\kappa = \aleph_\omega$, así que colapsa muchos otros cardinales.

En $\mathrm{V}[G]$ $(\kappa^{+n})^{\mathrm{V}} = (\kappa^+)^{\mathrm{V}[G]}$ y $2^\kappa = \kappa^+$, así que este modelo no nos sirve. Para obtener el que queremos, debemos restringirnos a cierto modelo interno.

Para conseguir el cambio en la cofinalidad de los κ^{+i} deben introducirse ω-sucesiones cofinales. Los elementos del forcing $\mathbb{P}$ son tuplas $p = (P_1, \ldots, P_m, f_0, \ldots, f_m, A, H)$ donde $m \in \omega$, cada $P_i \in [\kappa^{+(n-1)}]^{<\kappa}$ es t.q. $P_i \cap \kappa$ es un cardinal inaccesible y $\mathrm{otp}(P_i \cap \kappa^{+j+1}) = (\mathrm{otp}(P_i \cap \kappa^{+j}))^+$ para $j < n - 1$. Esto ocurre $\mathcal{U}$-c.s., donde $\mathcal{U}$ es normal sobre $[\lambda]^{<\kappa}$. El argumento eventualmente requiere que $\mathcal{U}$ sea escogido con cuidado, para que refleje cierta propiedad de partición similar a la de los medibles expresada en el Lema 12, pero para nuestro bosquejo esto no es necesario.

Sea $\kappa_i = \mathrm{otp}(P_i \cap \kappa)$. $f_0 \in \mathrm{Coll}(\omega_1, < \kappa_1)$, $f_i \in \mathrm{Coll}(\kappa_i^{+n}, < \kappa_{i+1})$ para $1 \leq i < m$, y $f_m \in \mathrm{Coll}(\kappa_m^{+n}, < \kappa)$. La idea es que las f_i, al tiempo, buscan colapsar κ_{i+1} a $(\kappa_i^{+n})^+$ y κ_1 a ω_2, a la vez que los P_i permiten escoger los κ_i sobre los cuales se hace esto, de modo que como m varía, al final κ sea $\aleph_\omega$.

Todo elemento de A es un candidato a continuar la sucesión de los P_i, $A \in \mathcal{U}$. Si $Q \in A$, $P_m \subseteq Q$ y $\mathrm{otp}(P_m) < \mathrm{otp}(Q \cap \kappa)$, y $f_m \in \mathrm{Coll}(\kappa_m^{+n}, < Q \cap \kappa)$.

H es una función de dominio A. Si $Q \in A$, $H(Q) \in \mathrm{Coll}((\kappa \cap Q)^{+n}, < \kappa)$. Hay algunas otras restricciones, pero para nuestro propósito éstas bastan.

Las restricciones en A 'garantizan' que '$f_{m+1} \in \mathrm{Coll}(\kappa_m^{+n}, < \kappa_{m+1})$' una vez se haya escogido P_{m+1} de entre sus elementos. Cada $H(P)$ es una posibilidad para tales funciones 'futuras'.

Esta idea intuitiva se refleja en la definición de $\leq_{\mathbb{P}}$, que debería resultar natural de lo dicho. Por ejemplo, si H_i es la función de $p_i \in \mathbb{P}$ para $i = 0, 1$, y $p_0 \leq p_1$, se pide que en cada elemento P del dominio de H_0, $H_1(P) \subseteq H_0(P)$.

Magidor muestra que $\leq_{\mathbb{P}}$ satisface un análogo débil del Lema 35 (es aquí donde se requiere escoger adecuadamente a $\mathcal{U}$), lo que es esencial en el establecimiento de todas las propiedades que se consideran de la extensión.

Al tener un genérico G, los $(P_m)_m$ de las diversas condiciones en G forman una sucesión, asociada con la cual hay cardinales $(\kappa_m)_m$, y funciones $(f_m)_m$, $f_m : \kappa_m^{+n} \times \kappa_{m+1} \to \kappa_{m+1}$ que colapsan κ_{m+1} a $(\kappa_m^{+n})^+$ (κ_m^{+n} es en el sentido de V, su sucesor, en el de V[G]). Además, $\mathrm{cf}\, \kappa_m^{+i} = \omega$ para $i \in [i, n)$, así que $(|\kappa_m^{+n}| \leq |\kappa_n|^+)^{V[G]}$.

Sea $G \restriction_i = \{ (f_0, \ldots, f_{i-1}) : \exists p \in G\, (p = (P_1, \ldots, P_l, f_0', \ldots, f_l', A, H)$ con $l \geq i, f_j' = f_j$ para $j < i) \}$. No es difícil ver que $G \restriction_i$ es $\mathrm{Coll}(\omega_1, < \kappa_1) \times \mathrm{Coll}(\kappa_1^{+n}, < \kappa_2) \times \cdots \times \mathrm{Coll}(\kappa_{i-1}^{+n}, < \kappa_i)$-genérico.

Afirmación. *Si $\mu \leq \kappa_i^{+(n-1)}$ para algún i, y la longitud de $p \in \mathbb{P}$, es decir el número de P_js en p, es $\geq i$,*

$$p \Vdash \tau \subset \mu \longrightarrow p \Vdash \tau \in \check{V}[G\restriction_i]. \quad \square_{(\mathrm{Af})}$$

Luego, como en V[$G \restriction_i$] $\omega, \omega_1, \kappa_1, \kappa_1^+, \ldots, \kappa_1^{+n}, \kappa_2, \kappa_2^+, \ldots, \kappa_2^{+n}, \kappa_3, \ldots, \kappa_i^{+n}$ lista los cardinales $\leq \kappa_i^n$, y los κ_i son cofinales en κ, $\kappa = \aleph_\omega^{V[G]}$, como esperábamos, y análogamente se muestra que es límite fuerte.

El modelo que buscamos es un modelo interno de V[G]: $V[(\kappa_m)_m, (f_m)_m] = V_0$. V_0 y V[G] tienen los mismos cardinales bajo κ, así que

$$V_0 \models \kappa = \aleph_\omega \text{ es límite fuerte.}$$

La prueba se completa mostrando que en V_0 $\kappa^+, \ldots, \kappa^{+n}$ son cardinales pues, como en V $\kappa^{+n} \leq 2^\kappa$, $V_0 \models 2^{\aleph_\omega} \geq \aleph_{\omega+n}$ [La igualdad vale, pero establecerla ya no es un problema, pues podemos conseguirlo forzando desde V_0 con $\mathrm{Coll}(\kappa^{+n}, 2^{\aleph_\omega})$, sin dañar nada bajo $\aleph_\omega$].

Para esto, Magidor da un argumento que involucra automorfismos. Es bien conocido (ver [Ku5] cap. VII) que si Γ es un automorfismo de $\mathbb{P}$, hay una extensión natural de Γ, que denotaremos igual, t.q. para cualquier fórmula φ, cualesquiera nombres $\tau_1, \ldots, \tau_n$, y $p \in \mathbb{P}$

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \iff \Gamma p \Vdash \varphi(\Gamma\tau_1, \ldots, \Gamma\tau_n).$$

Además, si $(\kappa_m)_m$ y $(f_m)_m$ son invariantes bajo Γ, todo elemento de V_0 tiene un nombre invariante bajo Γ.

Se procede por contradicción: Sea $\mu < \kappa$ la cofinalidad de κ^{+m}, $1 \leq m \leq n$, en V_0. Usando el análogo débil del Lema 35, Magidor halla un Γ t.q. $\Gamma p \parallel p$ para p un testigo particular de que hay una $f : \mu \to \kappa^{+m}$ cofinal. Esto le permite acotar, para cada $\beta < \mu$,

$$\mathcal{A}_\beta = \{ \alpha : \exists q \leq p\, (q \Vdash \dot{f}(\beta) = \alpha) \} :$$

$|\mathcal{A}_\beta| \le \kappa^{+(m-1)}$. Entonces $\bigcup_{\beta<\mu} \mathcal{A}_\beta$ contiene el rango de f y está acotado en κ^{+m}, lo que es una contradicción.

Para $n = \omega$ el argumento es similar, pero el forcing inicial debe ser más cuidadoso.

La parte b) usa también el mismo esquema, aunque ahora se emplea fuertemente el orden $\lhd$ para ultrafiltros normales sobre $[\lambda]^{<\kappa}$, $\lambda \ge \kappa$. En realidad, la situación es un tanto más general pues $\mathcal{U} \lhd \mathcal{V}$ tiene sentido aunque $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ no sean ultrafiltros sobre el mismo conjunto. Magidor comienza (con la notación del enunciado) formando una ρ-sucesión $\lhd$-creciente $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, $\mathcal{U}_\alpha$ normal sobre $[\lambda_\alpha]^{<\kappa}$ para $(\lambda_\alpha)_\alpha$ creciente, con la cual, procediendo como en el Teorema 32, consigue un modelo en el cual $2^\kappa = \kappa^{+\gamma}$, y $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ es $\lhd$-creciente, $\mathcal{U}_\alpha$ normal sobre $[\kappa^{+\delta_\alpha}]^{<\kappa}$. Magidor utiliza las sumersiones asociadas para construir un forcing que en esencia genera ρ-sucesiones cofinales en cada cardinal entre κ y $\kappa^{+\delta}$. Para eso, requiere de la construcción en [Ma4] —recuérdese que el trabajo de Magidor es anterior al de Radin—. El argumento final necesita mostrar que en el V_0 correspondiente $\kappa^{+\eta}$ es un cardinal para $\eta \le \gamma$, lo que se consigue con la misma idea que arriba. Ahora la cota depende del Teorema 29.a), de Solovay: $|[\kappa^{+\delta}]^{<\kappa}| = \kappa^{+\delta}$ si $\kappa^{+\delta}$ es regular. $\square_{(T57)}$

En [Ma2], partiendo de una hipótesis más fuerte, se muestra que $\aleph_\omega$ incluso puede ser el primer contraejemplo a GCH.

Teorema 58. *[Magidor] Si existe un supercompacto con un huge mayor que él, es consistente que* $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ *aunque* $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ $\forall n < \omega$.

El argumento será presentado de forma más esquemática aun que para el teorema anterior; los detalles pueden verse en [Ma2]:

Dem: Por el Lema 63 podemos suponer que en V κ es supercompacto, $2^\kappa = \lambda^+$, donde λ es debilmente inaccesible, y hay un ultrafiltro fino $\mathcal{U}'$ no (κ,λ)-regular sobre $[\lambda]^\alpha$ para algún α, $|\alpha| = \kappa$.

Gracias a la supercompacidad, podemos hallar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ normal sobre $[\lambda]^{<\kappa}$ y, por tanto, que refleja los argumentos necesarios para comenzar: Sea $\lambda(P) = \mathrm{otp}(P \cap \lambda)$.

Entonces el siguiente conjunto está en $\mathcal{U}$: la colección de todos los $P \in [\lambda]^{<\kappa}$ t.q.

a) $\lambda(P) = \mathrm{otp}(P)$ es regular.
b) $\kappa(P) = \kappa \cap P$ es un inaccesible límite de inaccesibles.
c) $2^{\kappa(P)} = \lambda(P)^+$, $\lambda(P)^{<\kappa(P)} = \lambda(P)$.
d) Hay un ultrafiltro $\kappa(P)$-completo fino, no $(\kappa(P), \lambda(P))$-regular sobre $[\lambda(P)]^{\alpha(P)}$ para algún α con $|\alpha(P)| = \kappa(P)$.

Este $\mathcal{U}$ se consigue pues en $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{U}'')$, donde $\mathcal{U}''$ es testigo de la 2^{λ^κ}-supercompacidad de κ, está $\mathcal{U}'$. Ahí, $\lambda^{<\kappa} = \lambda$, pues esto vale en V porque κ es fuertemente compacto (teorema 29).

Con $\mathcal{U}$ puede definirse la noción de forcing $\mathbb{P}$. Ésta recuerda la del teorema anterior, pero es más elaborada. Ahora tenemos que cada $p \in \mathbb{P}$ es de la forma $(\vec{P}, \vec{f}, \vec{g}, A, F, G, H)$, donde los P_i cumplen a)–d), $f_i \in \mathrm{Coll}(\kappa^+(P_i), < i(P_i))$, donde $i(P)$ es el primer inaccesible mayor que $\kappa(P)$, $g_i \in \mathrm{Coll}(i(P_i)^+, < \kappa(P_{i+1}))$ —con el comportamiento adecuado en f_0—. A es un conjunto de posibles formas de continuar la sucesión de los P_i, $A \in \mathcal{U}$; F, H y G son funciones que, como antes, restringen la manera en que habrán de comportarse futuras f y g.

Entonces la idea, como en el resultado de Silver-Prikry en el capítulo 1, es hacer $2^\kappa = \kappa^{++}$ y luego $\kappa = \aleph_\omega$, agregando una ω-sucesión cofinal, aunque ahora debe colapsar muchos cardinales. Digamos que $(\kappa_n)_n$ es tal sucesión, y como κ era supercompacto, podemos suponer $2^{\kappa_n} > \kappa_n^+$. Luego se colapsan los cardinales necesarios para rearreglar GCH bajo κ.

Como en el teorema anterior, los posibles κ_n obtienen restricciones antes de ser escogidos. De nuevo, es esencial establecer un análogo del Lema 35. Esto permite hallar condiciones que extienden de manera 'uniforme' una condición dada. Se puede pasar ahora a definir las funciones $(f_n)_n$, y acá aparecen nuevas dificultades, pues el forcing involucrado no es lo suficientemente cerrado como era en el caso pasado. Por eso, Magidor ha definido las funciones no sobre elementos sino sobre parejas, y con la segunda coordenada restringe las posibilidades de la primera. Estos son detalles técnicos, pero no son fáciles de esquivar, y el mostrar que funciona recae por completo en las propiedades a)–c).

También ahora debe pasarse a un modelo interno, en el que λ no es colapsado. El argumento en este caso depende de d). $\square_{(T58)}$

Aunque los detalles sean en el último bastante más pesados, e ir de uno al otro no resulta trivial en absoluto, la demostración de los dos teoremas que hemos visto es en esencia la misma.

Shelah [Sh5] retoma este esquema y va más allá del Teorema 57 en otra dirección, obteniendo un resultado general del que deduce el siguiente:

Teorema 59. *[Shelah] Módulo la consistencia de un supercompacto, es consistente que*

a) *Dado $\alpha < \omega_1$, $\aleph_\omega$ sea límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1}$.*
b) *(P. ej.) Dado $\alpha < \omega_2$, $\aleph_{\omega_1}$ sea límite fuerte y $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+\alpha+1}$.* $\square_{(T59)}$

Shelah da más aplicaciones, por ejemplo (bajo las mismas hipótesis) es consistente tener δ con cf $\delta = \aleph_0$, $\aleph_\delta$ límite fuerte y $2^{\aleph_\delta}$ arbitrariamente grande, abajo del primer inaccesible κ, si $\aleph_\delta$ es suficientemente grande (y menor que κ). Más exactamente, Shelah define $f^{[\alpha]}$ por inducción en α y f^*, para $f : \mathrm{ORD} \to \mathrm{ORD}$ monótona:

$$\begin{aligned} f^{[0]}(\alpha) &= \alpha, \\ f^{[\beta+1]}(\alpha) &= f(f^{[\beta]}(\alpha)+1), \\ f^{[\gamma]}(\alpha) &= \bigcup_{\beta<\gamma} f^{[\beta]}(\alpha) \text{ para } \gamma \text{ límite;} \\ f^*(\alpha) &= f^{[\alpha]}(0). \end{aligned}$$

En particular, itera la operación de sucesor:

$$\begin{aligned} \mathrm{Suc}^0(\alpha) &= |\alpha|^+ \quad (= \omega \text{ si } \alpha \text{ es finito}) \\ \mathrm{Suc}^{\beta+1}(\alpha) &= (\mathrm{Suc}^\beta)^*(\alpha) \\ \mathrm{Suc}^\gamma(\alpha) &= \bigcup_{\beta<\gamma} \mathrm{Suc}^\beta(\alpha) \text{ para } \gamma \text{ límite.} \end{aligned}$$

Por ejemplo, $\mathrm{Suc}^1(\omega) = \aleph_\omega$, $\mathrm{Suc}^2(\omega)$ es el primer punto fijo, etc., y el resultado de Shelah muestra cómo, comenzando con κ supercompacto, puede obtenerse una extensión genérica donde $\mathrm{Suc}^\omega(\aleph_0) = \kappa$ es límite fuerte y $2^\kappa = \mu$ para cualquier μ con $\mu^\kappa = \mu$ (en V) y menor que el primer inaccesible $> \kappa$.

La demostración del Teorema 59 presenta un contexto abstracto en el que se comienza con κ supercompacto y una sucesión creciente $(\lambda_n)_n$ de cardinales. Además, vale la conclusión del Teorema 55. Hay también una sucesión $(\mathbb{R}_n)_n$ de nociones de forcing, cada una extendiendo a la anterior, $\Vdash_{\mathbb{R}_n} \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{n}^{<\kappa} = \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{n}$. Se construye entonces un forcing $\mathbb{P}$, muy similar al del Teorema 57 sólo que ahora las funciones, conjuntos y ultrafiltros involucrados tienen restricciones que dependen de los $\mathbb{R}_n$ (por ejemplo, los $\mathbb{P}$-nombres no tienen n-sucesiones de funciones, sino de nombres de funciones, $\dot{f}_0, \ldots, \dot{f}_l$; $\dot{f}_k$ un $\mathbb{R}_k$-nombre). Se fuerza con $\mathbb{P}$, y se pasa a un modelo interno, que depende de una sucesión $(f_n)_n$ de funciones y una $(\kappa_n)_n$ de cardinales. Diversas escogencias de los $\mathbb{R}_n$ y λ_n dan las distintas versiones del teorema.

Shelah no consigue GCH bajo $\aleph_\omega$, ni que $2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega_1}$. También muestra que el método requiere de alguna modificación si se desea superar las cotas establecidas (p. ej., muestra que en b) puede además valer la conjetura de Chang. Entonces $\alpha \geq \omega_2$ no es posible, por el Teorema 66 en el capítulo 5).

En trabajo realizado hacia 1991, Gitik y Magidor mejoraron el resultado de Shelah, mostrando que $\aleph_\omega$ podía, en el Teorema 59.a), ser el primer contraejemplo a GCH. Tampoco consiguieron hacer $2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega_1}$ (con $\aleph_\omega$ límite fuerte).

El resto de esta sección está dedicado a introducir el argumento de [GiMa1], donde se muestra tal mejora. Recuérdese la definición del orden $\preccurlyeq$ de Rudin-Keisler en la sección anterior.

Def. 71. $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathcal{A}}$ es un *sistema dirigido de Rudin-Keisler* sii hay un κ t.q. $\langle\mathcal{A}, <_\mathcal{A}\rangle$ es κ^{++}-dirigido, cada $\mathcal{U}_i$ es un ultrafiltro κ-completo sobre κ, y hay una sucesión $(\pi_{ij} : i \geq_\mathcal{A} j)$ de 'proyecciones' t.q.

a) $\pi_{ij} : \kappa \to \kappa$ proyecta $\mathcal{U}_i$ sobre $\mathcal{U}_j$: $\forall X\,(X \in \mathcal{U}_j \longleftrightarrow \pi_{ij}^{-1\prime\prime}X \in \mathcal{U}_i)$.
b) $\pi_{ii} = \mathrm{id}_\kappa$.
c) $\forall i, j, k \in \mathcal{A}$ con $i >_\mathcal{A} j >_\mathcal{A} k$, $\pi_{ik} = \pi_{jk} \circ \pi_{ij}$ $\mathcal{U}_i$-c.s.
d) Si $i \neq j$ y k son elementos de $\mathcal{A}$, $i, j <_\mathcal{A} k$, $\pi_{ki} \neq \pi_{kj}$ $\mathcal{U}_k$-c.s.

Def. 72. $\langle(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathcal{A}}, (\pi_{ij})_{i\geq_\mathcal{A} j}\rangle$ es un *sistema preciso* de ultrafiltros sii

a) $\mathcal{A}$ tiene mínimo, 0.
b) $(\mathcal{U}_i)_i$ es un sistema dirigido de Rudin-Keisler.
c) $\mathcal{U}_0$ es normal.
d) $(\pi_{ij})_{i\geq_\mathcal{A} j}$ es una sucesión de proyecciones, como en la definición anterior.
e) $\forall i \geq_\mathcal{A} j >_\mathcal{A} 0\,(\pi_{i0} = \pi_{j0} \circ \pi_{ij})$.
f) $\forall i, j \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\,(\pi_{i0} = \pi_{j0})$.
g) $\forall i \in \mathcal{A}\, \forall f \in {}^\kappa\kappa\,(f$ no constante módulo $\mathcal{U}_i \longrightarrow \exists X \in \mathcal{U}_i\, \forall\alpha < \kappa\,(|X \cap f^{-1}\text{“}\alpha| < \kappa))$.

Para cada $\mathcal{U}_i$, g) da una de las diversas caracterizaciones de P-punto (P_{κ^+}-punto en [ComN]).

Lema 67. *Si $\langle \mathcal{A}, <_{\mathcal{A}} \rangle$ es κ^{++}-dirigido ($|\mathcal{A}| \geq \omega$) y $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathcal{A}}$ es un sistema dirigido de Rudin-Keisler de P-puntos, entonces hay un sistema preciso de ultrafiltros de tamaño $|\mathcal{A}|$.* $\square_{(\mathrm{L67})}$

En [GiMa2] se muestra que la consistencia de la hipótesis del Lema se sigue de $o(\kappa) = \kappa^{+\lambda}$, $\kappa < \operatorname{cf} \lambda < \lambda$. En [GiMa1] se indica que también se sigue de esta suposición para λ ordinal sucesor.

Se puede definir un forcing con ayuda de un sistema preciso que colapsa κ a $\aleph_\omega$ y eleva su potencia a $\kappa^{+\alpha+1}$ ($\omega \leq \alpha < \omega_1$), manteniendo GCH bajo κ.

La hipótesis inicial es que κ es $(\kappa + \alpha + 1)$-fuerte. El argumento se basa en el de [Sh5]: los $\mathbb{R}_n$ ahí eran de la forma $\left[\prod_{m<|D_n|} \operatorname{Coll}(\kappa^{+i_m+1}, < \kappa^{+i_{m+1}})\right] \times \operatorname{Add}(\kappa, \kappa^{+\alpha+2})$, donde $(i_m)_m$ enumera D_n en orden ascendente, y $\bigcup_n D_n = \alpha$, los D_n finitos y disyuntos (Éste es el punto del argumento que no permite generalizar directamente para $\alpha \geq \omega_1$).

Acá se procede similarmente: se toma una partición así, y se desea colapsar todos los cardinales entre κ^{++} y $\kappa^{+\alpha+1}$, excepto los de la forma κ^{+i+1} para $i \in D_n$.

Se define, para δ inaccesible,

$$\operatorname{Coll}_n(\delta) = \prod_{m<|D_n|} \operatorname{Coll}(\delta^{+i_m+1}, < \delta^{+i_{m+1}}).$$

Se hace un forcing iterado, de $\kappa + 1$ pasos, donde $\dot{\mathbb{Q}}_\beta = \{0\}$ a menos que β sea inaccesible. En tal caso, $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ primero escoge $n_\beta < \omega$ y luego fuerza con $\operatorname{Coll}_{n_\beta}(\beta)$. En límites, $\mathbb{P}_\beta$ es (como de costumbre) el límite directo de los $\mathbb{P}_\gamma$ ($\gamma < \beta$) si β es inaccesible, e inverso en otro caso.

Si $j : V \xrightarrow{\prec} M$ es testigo de que κ es $(\kappa + \alpha + 1)$-fuerte ($\operatorname{crit} j = \kappa$, $V_{\kappa+\alpha+1} \subseteq M$) y $n < \omega$, hay una extensión $j_n : V[G_n] \xrightarrow{\prec} M[H_n]$, donde G_n es $\mathbb{P}_\kappa * \dot{\operatorname{Coll}}_n(j(\kappa))$-genérico y H_n es $j(\mathbb{P}_\kappa) * \dot{\operatorname{Coll}}_n(\kappa)$-genérico.

Usando j y un buen orden $\lessdot$ de V_κ, Gitik y Magidor construyen un sistema preciso S de tamaño $\kappa^{+\alpha+1}$, y con j_n, en $V[G_n]$ S puede 'expandirse' a un tal sistema S', en el sentido de que a todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ de S corresponde otro, $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}$, en S'. Se define ahora otro forcing, con ayuda de S', parecido de nuevo a los empleados en esta sección. Este forcing vuelve a κ $\aleph_\omega$ preservando los cardinales entre κ y $\kappa^{+\alpha+1}$. Para esto se adiciona una sucesión de Prikry a cada $\mathcal{U}_i$, incluyendo en las condiciones del forcing sucesiones que serán los segmentos iniciales finitos, y que garantizan la compatibilidad mencionada en la sección anterior. Se introduce un árbol cuyos nodos son sucesiones finitas que codifican posibles extensiones (como el conjunto A y las funciones F y G antes). El argumento final requiere factorizar $\mathbb{P}$ adecuadamente para mostrar, mediante condiciones de cadena, que se preservan los cardinales requeridos.

En esta construcción *no* es necesario pasar a un modelo interno. Si se desea GCH bajo κ, sólo es necesario comenzar con un modelo donde además valga GCH, y un core model sirve.

Variaciones de esta construcción permiten modelos de distintas violaciones de SCH. Ver la sección 5, y la sección 3 del capítulo 5.

Las sucesiones de ultrafiltros y el orden envuelto recuerdan extenders, y en [GiMa2] se explora precisamente esta idea mostrando cómo un extender puede convertirse en un sistema de Rudin-Keisler cambiando la cofinalidad de los cardinales involucrados, y sin modificar el orden asociado.

La siguiente pregunta surge por sí sola:

Pregunta 6. ¿Es consistente $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ y $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_{\omega_1}$? Para cardinales mayores quizás resulte útil tener información sobre qué tan lejos puede llegarse, en el siguiente sentido: ¿Hay algún modo de formalizar la función $\chi : \alpha \mapsto \mathrm{Sup}\{\beta \colon \mathrm{Con}(\aleph_\alpha$ es límite fuerte —o $2^{\mathrm{cf}\,\alpha} < \aleph_\alpha$— y $\beth(\aleph_\alpha) = \aleph_\beta)\}$, para α límite (o para $\aleph_\alpha$ singular) de modo que puedan estudiarse sus propiedades? Acá, la consistencia es relativa a *alguna* hipótesis de cardinales grandes. Por ejemplo, una respuesta negativa a la primera parte de la pregunta equivaldría a $\chi(\omega) = \omega_1$. ¿Es $|\chi(\alpha)| \leq |\alpha|^+$?

3. ¿Qué tan fuerte es ¬SCH? (II).

Hacia 1986 Moti Gitik demostró que $o(\kappa) = \kappa^{++}$ es suficiente para obtener un modelo con ¬SCH. Esto, junto con el resultado de la sección 5 del capítulo 3, establece la equiconsistencia ahí mencionada. Seguimos [Gi2]; la prueba depende de un resultado de Woodin, que exponemos primero:

Teorema 60. *[Woodin] Si es consistente GCH y tener una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ con* $\mathrm{crit}\, j = \kappa$ *t.q.*

a) ${}^\kappa M \subseteq M$ *y*
b) $\exists f \in {}^\kappa\kappa\,(j(f)(\kappa) = \kappa^{++})$,

entonces es consistente tener un medible κ con $2^\kappa = \kappa^{++}$, y por tanto es consistente ¬SCH.

Woodin muestra que incluso puede tenerse $\aleph_\omega$ límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ a partir de la hipótesis del teorema. A ésta se le pueden añadir 3 cláusulas:

c) $j(\kappa) > \kappa^{++}$ —que se deduce de b)—.
d) $\forall a \in M\, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa^{++}, g : [\kappa]^n \to \mathrm{V}\,(j(g)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = a)$.

d) es un requerimiento técnico que recuerda normalidad y permite en diversas partes de la prueba tomar genéricos apropiados.

e) $\kappa^{++} = (\kappa^{++})^M$.

Para tener e) puede extenderse V a un modelo donde esto valga. Por ejemplo, primero forzando con una iteración de κ pasos $(\mathbb{P}_\alpha)_\alpha$, donde $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es trivial excepto si α es inaccesible, en cuyo caso es (un nombre para) $\mathrm{Coll}(\alpha^+, < f(\alpha))$ si $f(\alpha)$ es inaccesible; acá f es un testigo de b), así que esto pasa usualmente. El forcing, como es usual, es de tipo Easton inverso. Si G es $\mathbb{P}_\kappa$-genérico, $j(G) = G * \dot{G}'$. G' puede escogerse de modo que la extensión de j a $\mathrm{V}[G]$,

$$j^* : \mathrm{V}[G] \xrightarrow{\prec} M[G * \dot{G}'],$$

es testigo de a)–e). [Gi2] demuestra esto para el caso particular que está considerando. Su argumento depende de un lema más general de Woodin, que aparece expuesto en [Cu1]:

Afirmación. *Sean κ un medible, $\mathcal{U}$ una medida normal sobre κ y $j : V \xrightarrow{\prec} M =$* $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{U})$. *Supongamos que $\mathbb{P}$ es κ-cerrado y $\mathbb{Q} = j(\mathbb{P})$ ($\mathbb{Q}$ es κ^+-cerrado porque ${}^\kappa M \subseteq M$*

y $j(\kappa) > \kappa$). Si G es $\mathbb{Q}$-genérico sobre V, y $j^* : V[G] \xrightarrow{\prec} M[j^*(G)]$ extiende a j, G es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[j^*(G)]$. $\Box_{(\mathrm{Af})}$

Acá j no necesariamente es generada por una medida normal. Si eso pasara, d) podría remplazarse por $\forall a \in M\, \exists g \in {}^{\kappa}\mathrm{V}\,(j(g)(\kappa) = a)$, pero el argumento para mostrar la afirmación es esencialmente el mismo en ambos casos.

Podemos entonces suponer e), lo que nos permite en b) tomar $f(\alpha) = \alpha^{++}$, simplemente.

Dem: (Teorema 60) Sea $\mathcal{U}$ la medida normal asociada con j, y factoricemos j como en el Teorema 16:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{V} \arrow[dl, "j_{\mathcal{U}}"'] \arrow[dr, "j"] & \\ M_{\mathcal{U}} \arrow[rr, "k"] & & M \end{tikzcd},$$

donde $M_{\mathcal{U}} = \mathrm{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U})$. Sea $\mathbb{P}_\kappa$ la iteración de κ pasos de tipo Easton inverso de

$$\mathrm{Add}(\alpha, \alpha^{++}), \quad \alpha < \kappa,$$

y tomemos G_κ $\mathbb{P}_\kappa$-genérico.

Sobre $\mathrm{V}[G_\kappa]$ forcemos con $\mathbb{Q} = \mathrm{Add}(\kappa, (\kappa^{++})^{M_{\mathcal{U}}}) * \dot{\mathrm{A}}\mathrm{dd}(\kappa^+, \kappa^{++})$. Sea $G^0_\kappa * \dot{\tilde{G}}$ $\mathbb{Q}$-genérico sobre $\mathrm{V}[G_\kappa]$, y denotemos $\mathrm{V}[G_\kappa][G^0_\kappa * \dot{\tilde{G}}]$ por V_1.

En $M_{\mathcal{U}}$,

$$j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathbb{Q}}) = \mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathrm{A}}\mathrm{dd}(\kappa, (\kappa^{++})^{M_{\mathcal{U}}}) * \dot{\mathbb{P}}' * \dot{\mathrm{A}}\mathrm{dd}(j_{\mathcal{U}}(\kappa), \lambda) * \dot{\mathrm{A}}\mathrm{dd}\big((j_{\mathcal{U}}(\kappa)^+)^{M_{\mathcal{U}}}, (j_{\mathcal{U}}(\kappa)^{++})^{M_{\mathcal{U}}}\big),$$

donde λ es $j_{\mathcal{U}}(\kappa)^{++}$ en el sentido de $\mathrm{Ult}\big(M_{\mathcal{U}}, j_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\big)$.

$j_{\mathcal{U}}$ puede extenderse en V_1 a $\bar{j} : \mathrm{V}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa] \xrightarrow{\prec} M_{\mathcal{U}}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{H}^0_1 * \dot{G}^0]$, donde H^0_1 es $\mathbb{P}'$-genérico sobre $M_{\mathcal{U}}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa]$ en $\mathrm{V}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa]$ y G^0 es $\mathrm{Add}(j_{\mathcal{U}}(\kappa), \lambda)$-genérico sobre $M_{\mathcal{U}}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{H}^0_1]$. H^0_1 se halla con ayuda de la afirmación, y G^0 se toma de modo que contenga a $j_{\mathcal{U}}$“G^0_κ. $\bar{j}$“(G^0) genera un $\mathrm{Add}\big((j_{\mathcal{U}}(\kappa)^+)^{M_{\mathcal{U}}}, (j_{\mathcal{U}}(\kappa)^{++})^{M_{\mathcal{U}}}\big)$-genérico sobre $M_1 = M_{\mathcal{U}}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{H}^0_1 * \dot{G}^0]$, G', y $\bar{j}$ se puede extender a $j^* : \mathrm{V}_1 \xrightarrow{\prec} M_1[G']$.

Ahora se realiza una extensión de V_1 donde $2^\kappa = \kappa^{++}$, y se extiende j^* a este nuevo modelo para demostrar que κ es medible ahí. El forcing considerado es

$$\mathbb{S} = \mathrm{Fn}(\kappa, [(\kappa^{++})^{M_{\mathcal{U}}}, \kappa^{++}), \kappa)^{\mathrm{V}_1}.$$

Si G^1_κ es $\mathbb{S}$-genérico sobre V_1 y $\mathrm{V}^* = \mathrm{V}_1[G^1_\kappa]$, entonces la extensión de j^* es de la forma

$$\bar{j}^* : \mathrm{V}^* \xrightarrow{\prec} M[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{G}^1_\kappa * G''];$$

queremos llegar a una sumersión definible desde V^*, lo que dificulta la definición de G'', que depende de la extensión de k a $\bar{k} : M_{\mathcal{U}}[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa] \xrightarrow{\prec} M[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{G}^1_\kappa]$:

$G'' = \bar{k}$“$(H^0_1 * \dot{G}^0 * \dot{G}' * \dot{\tilde{G}}^0)$, donde $\tilde{G}^0$ es $M_1[G']$-genérico sobre $j^*(\mathbb{S})$.

Finalmente, si $G'' \cap \mathrm{Fn}\big(j(\kappa), [k(\lambda), j(\kappa^{++})), j(\kappa)\big)^{M[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{G}^1_\kappa]} = G$, se toma $G^* = \{q^* : q \in G\}$ donde cada q^* coincide con q en los puntos de su dominio que no son de la forma $(j(\alpha), j(\beta))$, y para estos $q^*(j(\alpha), j(\beta)) = j(G(\alpha,\beta))$. Un argumento adicional establece la genericidad de G^*, y había sido usado ya antes por Woodin en trabajo conjunto con Shelah.

$M^* = M[G_\kappa * \dot{G}^0_\kappa * \dot{G}^1_\kappa * (G'' \setminus G)^{\cdot} * \dot{G}^*]$ y $\tilde{j} : \mathrm{V}^* \xrightarrow{\prec} M^*$, la extensión natural, dan la sumersión buscada. No es difícil ahora mostrar, por d), que $\tilde{j}$ es la sumersión asociada con la medida normal que genera. $\square_{(\mathrm{T60})}$

Por el resultado de Woodin basta, partiendo de $o(\kappa) = \kappa^{++}$, llegar a un modelo de a)–d).

Teorema 61. *[Gitik] Si $V \models GCH$ y $\vec{\mathcal{U}}$ es una sucesión coherente de ultrafiltros con $o^{\vec{\mathcal{U}}}(\kappa) = \kappa^{++}$ y $o^{\vec{\mathcal{U}}}(\alpha) < \alpha^{++} \forall \alpha < \kappa$, entonces hay una extensión genérica de V, V^*, y una sumersión $j : V^* \xrightarrow{\prec} M$ definible en V^* t.q.*

a) $\operatorname{crit} j = \kappa$.
b) ${}^\kappa M \subseteq M$.
c) $\exists f \in {}^\kappa\kappa\,(j(f)(\kappa) = \kappa^{++})$.

Dem: Sea $\vec{\mathcal{U}}$ como en la hipótesis. Entonces s.p.d.g. $\vec{\mathcal{U}}$ es una función con dominio de la forma $\{(\alpha,\beta) : \alpha < \kappa+1, \beta < o^{\vec{\mathcal{U}}}(\alpha)\}$ y t.q. $\forall(\alpha,\beta) \in \operatorname{Dom}\vec{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}(\alpha,\beta)$ es normal en α y si $j^\alpha_\beta : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} \operatorname{Ult}(\mathrm{V}, \mathcal{U}(\alpha,\beta))$ es la sumersión aociada, entonces $j^\alpha_\beta(\vec{\mathcal{U}}) \restriction_{\alpha+1} = \vec{\mathcal{U}} \restriction_{(\alpha,\beta)}$.

S.p.d.g., podemos además suponer que hay una sucesión $\square$-coherente para $\vec{\mathcal{U}}$:

Def. 73. Una *sucesión $\square$-coherente para* $\vec{\mathcal{U}}$ es una función $\vec{C}$ con dominio las primeras coordenadas del dominio de $\vec{\mathcal{U}}$, $\operatorname{Dom}_1 \vec{\mathcal{U}}$, t.q.

a) $\forall \alpha \in \operatorname{Dom}_1 \vec{\mathcal{U}}\ \vec{C}(\alpha)$ es un testigo de $\square_{\alpha^+}$, es decir, $\vec{C}(\alpha)$ es una sucesión $(C(\alpha)_\lambda)_\lambda$ definida en los límites $< (\alpha^+)^+$ t.q. cada $C(\alpha)_\lambda$ es club en λ, $\operatorname{cf}\lambda < \alpha^+ \to \operatorname{otp}(C(\alpha)_\lambda) < \alpha^+$ y si $\mu < \lambda$ es un punto límite de $C(\alpha)_\lambda$ entonces $C(\alpha)_\mu = \mu \cap C(\alpha)_\lambda$.
b) $\forall \alpha \in \operatorname{Dom}_1 \vec{\mathcal{U}} \forall \beta < o^{\vec{\mathcal{U}}}(\alpha)\ (j^\alpha_\beta(\vec{C})(\alpha)$ es un segmento inicial de $\vec{C}(\alpha))$.

Observaciones. 1) $\square_\kappa$ fue definido por Jensen. En [Je1] se muestra que $\square_\kappa$ vale en L $\forall\kappa$ infinito y, más aun, en [Fri2] se muestra que hay una construcción 'global' que funciona en L. Solovay mostró que $\neg\square_{\omega_1}$ es consistente módulo un Mahlo, y Gregory probó que $\square_\lambda$ es falso si hay un $\kappa \leq \lambda$ λ^+-compacto. En [KReSo] se da una demostración combinatoria de este hecho (la demostración original usaba argumentos de teoría de grupos).

2) $(\alpha^{++})^{\operatorname{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U}(\alpha,\beta))} < \alpha^{++}$ si $\alpha < \kappa$, de modo que b) tiene sentido.

Puede suponerse que tal sucesión existe, pues Magidor mostró que vale en $\mathrm{L}[\vec{\mathcal{U}}]$ y Gitik halló una extensión genérica de V donde vale, tomando el producto de Easton inverso de nociones que generaban $\square_{\alpha^+}$.

Así que sea $\vec{C}$ una sucesión así, y sea $C^\alpha_\beta = C(\alpha)_\beta$. Extendamos la definición para β no límite, haciendo $C^\alpha_{\beta+1} = \{\beta\}$ si β no es límite o si $\operatorname{cf}\beta = \alpha^+$, y $C^\alpha_{\beta+1} = C^\alpha_\beta \cup \{\beta\}$ en otro caso. Tam,bién podemos asumir que $C^\alpha_\beta = \beta$ si $\beta \leq \alpha^+$.

Usando un producto de Easton inverso, agréguese una función $f \in {}^\alpha\alpha$ para cada $\alpha \leq \kappa$ inaccesible (p. ej., con $\operatorname{Coll}(\alpha,\alpha)$). Sea $\mathrm{V}[H]$ una tal extensión. En $\mathrm{V}[H]$ $\vec{\mathcal{U}}$ se extiende a una sucesión coherente $\vec{\mathcal{U}}_1$. Sea $H \cong H_{<\kappa} * \dot{H}_\kappa$ donde $H_{<\kappa}$ es el genérico correspondiente a la iteración antes de κ y H_κ al último paso.

Si en V$[H]$ hay un poset $\mathbb{P}$ κ-cc, $|\mathbb{P}| = \kappa$, t.q. si G es $\mathbb{P}$-genérico en V$[H][G]$ hay una sucesión $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha<\kappa^{++}}$ que es un sistema dirigido de Rudin-Keisler que extiende a $\big(\mathcal{U}_1(\kappa,\alpha)\big)_{\alpha<\kappa^{++}}$, entonces V$[H][G]$ es el V* que buscábamos.

En efecto, sea V$^* =$ V$[H][G]$, y tomemos una sucesión $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ como la que se afirma que existe. Tomando el límite directo de los Ult(V*,$\mathcal{U}_\alpha$), $\alpha < \kappa^{++}$, obtenemos una sumersión

$$j' : \mathrm{V}^* \xrightarrow{\prec} M_1$$

con $j(\kappa) = \kappa^{++}$. Sea $M_2 = \mathrm{Ult}\big(M_1, j'(\mathcal{U}_0)\big)$. La sumersión asociada $j_1 : \mathrm{V}^* \xrightarrow{\prec} M_2$ satisface $j_1(\kappa) > \kappa^{++}$, y ${}^\kappa M_2 \subseteq M_2$, pues ${}^\kappa M_1 \subseteq M_1$ ya que M_1 es el límite directo de κ^{++} modelos con esta propiedad. Con M_2 no necesariamente vale c) del enunciado, así que tomaremos un modelo interno:

M_2 es de la forma $M^*[j_1(H)][j_1(G)]$, con $j_1(H)^{j_1(\kappa)}$ —def. 27— $\mathrm{Coll}(j_1(\kappa), j_1(\kappa))$ genérico. Podemos remplazar cada H^α por la función que codifica, de modo que

$$j_1(H)\big(j_1(\kappa)\big) \in {}^{j_1(\kappa)}j_1(\kappa).$$

Sea $H^* \restriction_{j_1(\kappa)} = j_1(H) \restriction_{j_1(\kappa)}$ y $H^*\big(j_1(\kappa)\big) = \big(j_1(H)\big(j_1(\kappa)\big) \setminus \big\{\big(\kappa, j_1(H)\big(j_1(\kappa)\big)(\kappa)\big)\big\}\big) \cup \big\{(\kappa, \kappa^{++})\big\}$.

Como sólo modificamos un valor, H^* es genérico, y $M^*[j_1(H)] = M^*[H^*]$.

Ahora bien: V$^* =$ V$[H][G] =$ V$[H_{<\kappa}][H_\kappa][G] =$ V$[H_{<\kappa}][G][H_\kappa]$ y, análogamente,

$$M_2 = M^*[j_1(H_{<\kappa})][j_1(G)][H_{j_1(\kappa)}]. \qquad (*)$$

$j_1(\mathbb{P}) \in M^*[j_1(H_{<\kappa})]$ es $j_1(\kappa)$-cc y ni $H_{j_1(\kappa)}$ ni $H^*_{j_1(\kappa)}$ agregan subconjuntos acotados de $j_1(\kappa)$ a $M^*[j_1(H_{<\kappa})]$, así que $j_1(G)$ es $j_1(\mathbb{P})$-genérico sobre $M^*[j_1(H_{<\kappa}) * \dot{H}^*_{j_1(\kappa)}]$, y podemos remplazar $H_{j_1(\kappa)}$ por $H^*_{j_1(\kappa)}$ en $(*)$.

Sea $j^* : \mathrm{V}^* \to M^*[H^*][j_1(G)]$ la función dada por

$$j^* \restriction \mathrm{V} = j_1, \quad j^*(\tau_{H*\dot{G}}) = j_1(\tau)_{H^* * j_1(\dot{G})}.$$

Es fácil ver que j^* está bien definida y es elemental. j^* es como se quiere, pues

$$j^*\big(H(\kappa)\big)(\kappa) = H^*\big(j_1(\kappa)\big)(\kappa) = \kappa^{++}.$$

Así que sólo es necesario definir $\mathbb{P}$, que resulta ser una iteración de κ pasos. La construcción y diversas propiedades de $\mathbb{P}$ dependen fuertemente de la construcción presentada en [Gi1] y de algunos lemas ahí mostrados. No la daremos aquí, y sólo agregamos unos comentarios.

Para simplificar la notación, llamemos V a V$[H]$ y $\vec{\mathcal{U}}$ a $\vec{\mathcal{U}}_1$. E problema es definir $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ para $\alpha \in \mathrm{Dom}_1 \vec{\mathcal{U}}$. Esta definición utiliza la sucesión coherente $\vec{C}$, y requiere de algunos preliminares, como la introducción de funciones que Gitik denomina 'de γ-profundidad':

Para $\gamma \leq \alpha^{++}$ definimos $\rho^\gamma : \gamma + 1 \to \omega$ por inducción: Asumámosla definida para todo $\gamma' < \gamma$. $\rho^\gamma(\gamma) = 0$, y si $\gamma'' < \gamma$, hay 2 posibilidades:

(1) $\gamma'' \in C^\alpha_\gamma$. Entonces $\rho^\gamma(\gamma'') = m$ sii en la enumeración creciente de C^α_γ γ'' es el $(\lambda + m)$-ésimo ordinal, donde λ es límite y $m \in \omega$.

(2) $\gamma'' \notin C^\alpha_\gamma$. Sea γ' el mínimo de $C^\alpha_\gamma \setminus \gamma''$. $\rho^\gamma(\gamma'') = \rho^{\gamma'}(\gamma'') + \rho^\gamma(\gamma') + 1$.

Con las funciones ρ^γ se puede definir una sucesión de ordinales que codifican información de los C^α_γ, y por tanto permiten 'reflejar' propiedades de un cardinal a otros menores.

Gitik las usa para construir sucesiones coherentes (γ-coherentes) con las que obtiene γ-árboles, una noción $\mathbb{P}(\alpha,\gamma)$ de forcing, y ultrafiltros $\mathcal{U}(\alpha,\gamma,t)$, para t γ-coherente y $\gamma < o^{\vec{\mathcal{U}}}(\alpha)$. Con los ultrafiltros asocia proyecciones, que convierten en dirigido al sistema asociado. Los $\mathbb{P}(\alpha,\gamma)$ se definen inductivamente, $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha = \dot{\mathbb{P}}(\alpha,(o^{\vec{\mathcal{U}}})\check{}(\alpha))$, y corresponden a $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ en los $\mathrm{Ult}(\mathrm{V},\mathcal{U}(\alpha,\gamma))$. Los árboles se definen de modo que los ultrafiltros que resultan (de la forma $\mathcal{U}(\kappa,\gamma,())$, con $\gamma < o^{\vec{\mathcal{U}}}(\kappa) = \kappa^{++}$) son en la extensión la sucesión de Rudin-Keisler que se buscaba. $\square_{(\mathrm{T61})}$

4. Posibles Comportamientos Globales de la Función Exponencial.

Nos hemos concentrado en las 2 secciones anteriores en presentar resultados locales: Qué tan lejos puede llegar la exponencial de un $\aleph_\alpha$ con α fijo bajo ciertas restricciones en la sección 2, y en la última sección un ejemplo de cómo son necesarias nuevas ideas para obtener tales resultados bajo hipótesis débiles.

Ahora nos interesamos en otra dirección: ¿Qué puede decirse *globalmente* de la exponencial, más allá del teorema de Easton?

En el capítulo 0 mostramos cómo el lema de Bukovský-Hechler da algunas restricciones en los cardinales singulares: $2^{\aleph_\alpha}$ y $\aleph_{\alpha+\beta}$ no pueden ser la misma función (de α) si $\beta \geq \omega$. La teoría de pcf y los resultados de Galvin y Hajnal dan también limitaciones. Además, la presencia de cardinales grandes afecta también el comportamiento de la función. Por ejemplo, SCH no puede fallar globalmente si hay fuertemente compactos en V.

En esta sección presentaremos 2 resultados globales que indican qué tipo de fallas cabe esperar, y lo corta que queda la teoría para determinar qué otras libertades pueden tenerse.

Teorema 62.

a) *[Foreman-Woodin] Asumiendo la consistencia de un supercompacto con infinitos inaccesibles mayores que él, GCH puede fallar globalmente.*

b) *[Woodin] De hecho, la consistencia de un $\mathcal{P}^2(\kappa)$-hipermedible implica la de*

$$\forall\kappa\,(2^\kappa = \kappa^{++}).$$

c) *[Shelah-Cummings] Si es consistente tener 6 supercompactos en V, también es tener*

$$\forall\kappa\,\big(2^\kappa \textit{ es debilmente inaccesible y } \forall\lambda\in[\kappa,2^\kappa)\,(2^\lambda = 2^\kappa)\big) \textit{ y}$$

que además toda álgebra booleana infinita B tenga $2^{|B|}$ subálgebras.

Teorema 63. *[Cummings] Si es consistente tener un $\mathcal{P}^3(\kappa)$-hipermedible, también lo es que GCH valga en los sucesores y falle en los límites.*

Observaciones. 1) El resultado de Foreman y Woodin [FWo] fue obtenido en 1979 y apareció publicado en el 91. Es el primer resultado que se conoció en el cual SCH falla globalmente. El resultado de Woodin es mencionado ahí y en [Cu1] pero no ha sido publicado.

2) Shelah y Cummings, en [CuSh], obtienen de hecho en su modelo que toda álgebra booleana infinita B tiene un subconjunto A no redundante (i.e., $\forall a \in A$, a no es elemento del álgebra generada por $A \setminus \{a\}$) con $2^{|A|} = 2^{|B|}$, de donde la segunda parte de la conclusión se deduce facilmente. El comportamiento de la exponencial que ellos obtienen es básicamente el de a), aunque en [FWo] no es dicho explícitamente, y en verdad la construcción de [CuSh] es una variación de la de Foreman y Woodin.

3) El resultado de Cummings [Cu1] fue obtenido en 1988 y apareció en el 92. Seguramente la hipótesis usada es la correcta, así como en el resultado de Woodin. Sin embargo, esto no debería bastar, pues aun falta determinar qué hipótesis de cardinales grandes son consistentes con las conclusiones anotadas.

Hasta donde sé, la siguiente pregunta es abierta:

Pregunta 7. ¿Si $2 < n < \omega$, es consistente (módulo cardinales grandes)

$$\forall \kappa \, (2^{\kappa} = \kappa^{+n})\,?$$

Posiblemente la respuesta es afirmativa. Parece más difícil determinar si es consistente con un fuertemente compacto κ, p. ej., que $\forall \lambda < \kappa \, (2^{\lambda} = \lambda^{++})$; y en tal caso, saber con qué libertad se cuenta por encima de λ. Si κ fuese supercompacto, o fuerte, por la demostración del teorema 30 sabemos que $2^{\mu} \leq \mu^{++} \, \forall \mu$. ¿Puede ser la exponencial sobre κ 'arbitraria' sujeta a SCH y esta restricción?

Dem: (Teorema 62) Nos centraremos en a). El argumento es como los de la seción 2. Se produce una extensión, y luego se toma un modelo interno. Acá hay un elemento adicional, pues luego debe tomarse un sub*conjunto* de este modelo.

Si κ es supercompacto y $(\kappa_n)_{n>0}$ enumera ω inaccesibles sobre κ, podemos asumir que κ es indestruible en el sentido de Laver, y usando forcing de Easton inverso hacer $\kappa_n = \beth_n(\kappa) = \beth_n(\kappa)^{<\beth_n(\kappa)}$ el n-ésimo debilmente inaccesible mayor que κ en una extensión.

Así que podemos suponer que esto ya ocurre en V. Se define entonces un forcing $\mathbb{P}$, que incorpora la técnica de Radin (sección 1.a) en el esquema de Magidor, y se toma una proyección $\mathbb{P}^{\pi}$ de $\mathbb{P}$. En la extensión por esta proyección

1) κ es aun inaccesible.
2) Se ha agregado un club $(\kappa_{\alpha})_{\alpha<\kappa}$. Cada κ_{α}, en V, refleja propiedades de κ: es medible, $\beth_n(\kappa_{\alpha})$ es debilmente inaccesible, $\beth_n(\kappa_{\alpha})^{<\beth_n(\kappa_{\alpha})} = \beth_n(\kappa_{\alpha})$.
3) Si $p \in \mathbb{P}^{\pi}$ determina κ_{α} y $\kappa_{\alpha+1}$, entonces $\mathbb{P}^{\pi} \restriction_p \cong \mathbb{P}_{\alpha} \times \mathrm{Add}(\beth_4(\kappa_{\alpha}), \kappa_{\alpha+1}) \times \mathbb{Q}_{\alpha}$, donde $\mathbb{P}_{\alpha}$ es κ_{α}^{+}-cc si α es límite, y $\beth_4(\kappa_{\beta})^{+}$-cc si $\alpha = \beta + 1$; y $\mathbb{Q}_{\alpha}$ no agrega subconjuntos acotados de $\beth_4(\kappa_{\alpha+1})$ (i.e., $\mathbb{P}_{\alpha} \times \mathrm{Add}(\beth_4(\kappa_{\alpha}), \kappa_{\alpha+1})$ fuerza esto).

Se ha conseguido con $\mathbb{P}_{\alpha}$ además que GCH falle entre κ_{α} y $\beth_4(\kappa_{\alpha})$. Por 1), $V_{\kappa} \models$ ZFC. Por inducción, de 3) y 2) se sigue que μ es límite fuerte sii $\mu = \kappa_{\lambda}$ para λ límite, y que GCH falla siempre bajo κ. No es difícil comprobar que, además, en V_{κ} la exponencial es como en c) del enunciado porque los κ_{α} se mantienen debilmente inaccesibles. Sólo sería necesario modificar GCH bajo κ_0, pero eso no requiere más que añadir una cláusula.

Antes de explicar $\mathbb{P}$, Foreman y Woodin realizan algunos comentarios generales sobre sus propiedades:

Def. 74. $\mathbb{P}$ es *λ-Prikry* sii $\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\gamma} F_\alpha$ donde cada F_α es λ-cerrado, y para todo $p \in F_\alpha$ y toda fórmula φ, hay un $q \leq p$ en F_α que decide φ.

El forcing de Prikry $\mathbb{P}_\mathcal{U}$ para $\mathcal{U}$ normal sobre $\mu \geq \lambda$ es de esta forma, de ahí el nombre, y en realidad muchos de los posets encontrados en la sección 2 se comportaban así. La importancia de las nociones λ-Prikry reside en que no agregan subconjuntos acotados de λ, aunque pueden no ser λ-cerrados. Así se garantiza preservación de cardinales $\leq \lambda$ (si colapsamos alguno en una etapa α, no volveremos a afectar la región bajo α luego, en una iteración).

Easton factorizaba su forcing como uno λ-cc por otro λ-cerrado. Acá esperamos *factorizaciones fuertes* en λ, que son las correspondientes usando ahora nociones λ-Prikry; es decir, $\mathbb{P} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$ λ-cc, $\mathbb{R}$ λ-Prikry y t.q. si $(q,r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ y φ es una fórmula, hay un $r' \leq r$ en el mismo F_α que r t.q. $\mathbb{Q} \restriction_q$ contiene una anticadena maximal A de elementos q' con cada (q',r') decidiendo φ.

Ésta es basicamente la 'versión débil' del Lema 35 que satisfacen las nociones de forcing con que trabajamos antes. Si $\mathbb{P}$ factoriza fuertemente en λ regular, $\mathbb{P} \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, λ se preserva y $\mathbb{R}$ no agrega subconjuntos acotados de λ.

Nuestra noción factoriza así en los κ_α, y si $\mathbb{R}$, como arriba, es $\bigcup_\alpha F_\alpha$, cada F_α será $\beth_4(\kappa_\alpha)^+$-cerrado. Esto eventualmente garantiza que en 1) preservamos incluso $\beth_3(\kappa)$-supercompacidad.

Sea $j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ testigo de la suficiente supercompacidad de κ. Recuérdese que en V, $\beth_n(\kappa)$ es debilmente inaccesible para $n < \omega$. Para definir $\mathbb{P}$ se comienza por una sucesión de medidas. En [FWo] ésta es de la forma $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, para algún $\lambda < \beth_2(\kappa)^+$, $M_0 = j``\beth_3(\kappa)$ y M_α $(\alpha > 0)$ es una medida sobre $[\beth_3(\kappa)]^{<\kappa} \times \mathrm{V}_\kappa$. Estas medidas son tomadas de modo que con cada una puede hallarse una función g_α con dominio en M_α y tomando valores en $\mathrm{Add}(\beth_4(\kappa_u), \kappa)$, donde κ_u depende en cada caso del punto donde se evalue g_α, y es un elemento de $\beth_3(\kappa)$.

Con sucesiones así se genera una familia de ultrafiltros como en el forcing de Radin. Las condiciones del forcing constan de sucesiones finitas de elementos de las medidas, y sucesiones de medidas, funciones como las g_α y elementos de $\mathrm{Add}(\beth_4(\kappa_u), \kappa)$. Así como en el forcing de Radin necesitábamos tomar $\beth_2(\kappa)^+$ medidas para asegurar que (con la notación de 1.*a*) hubiera dos ultrafiltros k_{λ_0} y k_{λ_1} que coincidieran (un *repeat point*), acá se requiere de $\beth_4(\kappa)$, y de los $\beth_4(\kappa_u)$ en cada condición. En [CuSh] se necesita incluso $\beth_5(\kappa_u)$ cada vez. Las tuplas que forman las condiciones permiten elevar simultaneamente el exponencial de muchos cardinales, a la vez que se van escogiendo los elementos del club en κ. En realidad, $\mathbb{P}$ es más complicado, para garantizar la factorización fuerte en cada κ_α; cada condición consta de sucesiones de tuplas como las explicadas, coherentes en cierto sentido).

La diferencia esencial con los argumentos de la sección 2 está en que la proyección se estudia como una extensión genérica en sí, y no sólo como un modelo interno de la extensión original. Esto permite conocer su comportamiento a gran escala, y se estudia como modelo interno para mirar los cardinales específicos del club, que estamos interesados en preservar.

Que κ es grande bajo la proyección depende de un argumento que involucra *condiciones maestras* (master conditions). Si $i : \mathbb{P} \to j(\mathbb{P})$ es un homomorfismo de orden que preserva anticadenas maximales y $m \in j(\mathbb{P})$ es tal que si $p \in \mathbb{P}$ entonces $m \parallel i(p) \parallel j(p)$, decimos que m es una condición maestra para $\mathbb{P}$, i y j. Usando el Teorema 24, si m es una condición maestra y forzamos con $j(\mathbb{P})\restriction_m$, $j : V \xrightarrow{\prec} M$ puede extenderse a $j^* : V[G] \xrightarrow{\prec} M[H]$, donde H es $j(\mathbb{P})\restriction_m$-genérico sobre M y G es el genérico en $\mathbb{P}$ inducido por i. Como m es compatible con $i(p)$ para todo $p \in \mathbb{P}$, $\Vdash_{\mathbb{P}} \kappa$ `es regular`. Más aun, si se deseara, variando ligeramente $\mathbb{P}$ puede garantizarse que κ siga siendo $\beth_n(\kappa)$-supercompacto. La existencia de condiciones maestras es un elemento básico de los argumentos con forcing de Radin, y la forma estándar de obtenerlas es a partir de repeat points, como los mencionados más arriba. $\square_{(\mathrm{T62})}$

Concluimos la sección con un rápido vistazo al argumento de [Cu1].

Dem: (Teorema 63) Esta demostración es bastante más elaborada que la del teorema anterior, pues se requiere de más cuidado en la escogencia de las sumersiones involucradas en los argumentos.

Cummings parte de un modelo de GCH con un $\mathcal{P}^3(\kappa)$-hipermedible y una sumersión j asociada a un extender como testigo. Esto es posible por la teoría de core models, así que basta asumir inicialmente la hipótesis anotada en el enunciado.

Sólo indicaremos los pasos que sigue la prueba. Primero, aprovechando la factorización usual de la sumersión j con la sumersión asociada con la medida normal $\mathcal{U}$ generada por j, se construye una iteración, luego de la cual puede, con argumentos similares a los de la sección 3, obtenerse una sumersión de la extensión $V[H]$ definible desde el mismo $V[H]$. Esto permite mostrar que a las hipótesis iniciales se les puede agregar la existencia de un genérico particular; un $G \in V$ $j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P})$-genérico sobre $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{U})$. Acá, $\mathbb{P}$ es un poset particular, y $j_{\mathcal{U}}$ es la sumersión asociada con $\mathcal{U}$.

Con ayuda de este genérico pueden producirse nuevas extensiones, una vez realizada en V otra iteración, en esta ocasión con el producto de Easton inverso de $\mathrm{Add}(\lambda, \lambda^{++})$, λ inaccesible. En la extensión la $\mathcal{P}^3(\kappa)$-hipermedibilidad se pierde, pero κ sigue siendo grande ($\mathcal{P}^2$-medible); GCH falla en cada inaccesible $\lambda < \kappa$, de hecho, $2^\lambda = \lambda^{++}$ y $2^{\lambda^{+n}} = \lambda^{+n+1}$ para $0 < n < \omega$. Así, tenemos ahora una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ testigo de la $\mathcal{P}^2(\kappa)$-medibilidad de κ con $M \models 2^\kappa = \kappa^{++}$ y $2^{\kappa^{+n}} = \kappa^{+n+1}$ para $0 < n < \omega$. De nuevo, j se puede tomar generada por un extender.

En esta situación, se construye una sucesión de medidas en el estilo de Radin, y con ellas se define un forcing para agregar un club en κ y una sucesión de genéricos: si $\{\kappa_\alpha\}_\alpha$ es el club, se tiene un genérico para cada $\mathbb{P}(\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$, donde $\mathbb{P}(\alpha, \beta) = \mathrm{Coll}(\alpha^{+4}, <\beta) \times \mathrm{Coll}(\beta, \beta^+)$ para α y β inaccesibles, $\alpha < \beta$. La idea es que a la vez estamos dañando GCH en muchos cardinales, y colapsando los espacios entre ellos. Esto lo rearregla parcialmente, de modo que los cardinales $< \kappa$ ahora son a lo más los κ_α^{+n} para $\alpha < \kappa$, $n \leq 4$, y el espacio se deja para que GCH falle 'ocasionalmente', i.e., justo en los límites κ_α para los α límite para los cuales κ_α^+ se preserva.

La demostración de que los κ_α^{+n} ($n \neq 1$, $n \leq 4$) se preservan es compleja. Envuelve un argumento tipo Prikry, cuyo establecimiento es el más complicado de los de todos los teoremas que hemos incluido que necesitan de él pues requiere, dados p y φ, la construcción de un $q \leq p$ particular que decida φ, y ahora no basta apelar a un lema combinatorio como aquellos que habían sido usados en cada caso. El forcing en consideración es enredado, de modo que la sóla construcción ya involucra bastante trabajo.

Luego, mediante el establecimiento de un análogo del resultado de Mathias sobre genericidad de las sucesiones cofinales en el forcing de Prikry, se construye un genérico que garantiza que si κ_α^+ colapsa y $f : \kappa_\alpha \to (\kappa_\alpha^+)^{V'}$ es sobre, donde V′ es la extensión previa, entonces hay una g (asociada con f mediante una de las sumersiones envueltas) con $g : \kappa_\alpha \to \kappa_\alpha^+$ sobre (en el modelo donde se encuentre), lo cual muestra que tal situación es imposible.

Como antes, basta ahora tomar V^*_κ, donde V^* es la extensión final, y este conjunto es modelo de la proposición enunciada. κ es aun $\mathcal{P}^2(\kappa)$-medible en V^*, de modo que en V^*_κ hay muchos cardinales grandes. De nuevo, es abierto hasta qué cardinales es compatible tener el resultado. $\square_{(T63)}$

5. Resultados Adicionales.

Es difícil apreciar la profundidad de los argumentos en las demostraciones mencionadas en las secciones precedentes sin entrar a presentar detalles, pero esperamos que al menos resulte clara la estructura que presentan estas demostraciones, todas siguiendo el estándar de la prueba de Magidor, excepto por [GiMa1,2], que introducen un nuevo método.

Mencionamos ahora otros resultados que se han obtenido, y que complementan los anotados en la sección 6 del capítulo 3.

Teorema 64.

a) $\mathrm{Con}(o(\kappa) = \kappa^{+\alpha}, \kappa < \mathrm{cf}\,\alpha < \alpha) \longrightarrow \mathrm{Con}(\kappa$ *es medible y* $2^\kappa = \kappa^{+\alpha})$.

b) *Si* κ *es fuerte en un modelo de GCH,* $\forall\lambda$ *hay una extensión donde no se agregan subconjuntos acotados de* κ, $\mathrm{cf}\,\kappa = \aleph_0$ *y* $2^\kappa \geq \lambda$. $\square_{(T64)}$

Observaciones. 1) Como se mencionó en la sección 2, luego del Lema 67, de la hipótesis en a) puede obtenerse un sistema preciso de ultrafiltros, y en [GiMa2] se muestra cómo con este sistema obtener $2^\kappa = \kappa^{+\alpha}$ preservando medibilidad.

2) Un resultado similar a b) es enunciado en el Teorema 70 en el capítulo 5.

3) Los dos resultados mencionados son debidos a Gitik y Magidor. a) se había obtenido antes a partir de $o(\kappa) = \kappa^{+\alpha}+1$ por parte de Woodin. Ahora tenemos la equiconsistencia.

Hay unos pocos resultados más que mencionaremos aquí: de $o(\kappa) = \kappa^{+\omega}$ se puede obtener $2^\kappa > \kappa^{+\omega}$, $\mathrm{cf}\,\kappa = \omega$ y GCH bajo κ ([GiMa2]). Woodin mostró que $o(\kappa) = \lambda + \omega_1$ basta para tener $\mathrm{cf}\,\kappa = \omega_1$, $2^\kappa = \lambda$ regular $> \kappa^+$, etc.

Shelah ha trabajado en generalizaciones distintas del concepto de exponencial, obteniendo teoremas que recuerdan GCH:

Con la notación de la definición 48 (capítulo 2), si κ es regular y $< \lambda$, sea $\lambda^{[\kappa]} = \mathrm{cov}(\lambda, \kappa^+, \kappa^+, \kappa)$. Explícitamente,

$$\lambda^{[\kappa]} = \text{mín}\{\,|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subseteq [\lambda]^\kappa \text{ y } \forall X \in [\lambda]^\kappa\, \exists Y \in [\mathcal{P}]^{<\kappa}\, (X \subseteq \bigcup Y)\,\}.$$

Entonces $\lambda^\kappa = \lambda$ sii $2^\kappa \leq \lambda$ y $\lambda^{[\theta]} = \lambda$ para todo θ regular $\leq \kappa$, y Shelah y Gitik mostraron que para finitos cardinales en esencia hay libertad, de modo que por ejemplo

$$\lambda^{[\aleph_0]}, \ldots, \lambda^{[\aleph_n]}$$

pueden ser independientes.

Usando la teoría de pcf (con un argumento que involucra ultrapotencias genéricas), Shelah mostró que de todos modos hay restricciones en general; p. ej., para $\kappa < \beth_\omega < \lambda$, si κ es regular suficientemente grande, $\lambda^{[\kappa]} = \lambda$.

Capítulo 5

Varios

El Camino sigue y sigue
desde la puerta.
El Camino ha ido muy lejos,
y si es posible he de seguirlo
recorriéndolo con pie fatigado
hasta llegar a un camino más ancho
donde se encuentren senderos y cursos.
¿Y de ahí adónde iré? No podría decirlo.

(J. R. R. Tolkien, *El Señor de los Anillos. I. La Comunidad del Anillo*, (1965).)

En este capítulo discutiremos brevemente algunos resultados relacionados con el comportamiento de la exponencial, que no se ubican directamente en la exposición que hemos seguido.

También tocaremos en otro problema de la aritmética cardinal sobre el que aun hay bastante por decir: El cardinal de los ultraproductos.

1. La Conjetura de Chang.

En primer orden, consideremos un tipo de similaridad τ contable, y estructuras para el lenguaje $\mathcal{L}_\tau$. Asumimos que en τ hay un símbolo de relación 1-aria R 'distinguido', de modo que nuestras estructuras son de la forma $\mathcal{M} = \langle M, R^{\mathcal{M}}, \ldots \rangle$.

Def. 75.

1. $\mathcal{M}$ es *de tipo* (κ, λ) sii $|M| = \kappa$ y $|R| = \lambda$.
2. $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\sigma, \theta)$ sii para toda $\mathcal{M}$ de tipo (κ, λ) existe un $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ de tipo (σ, θ). La *conjetura de Chang* para (κ, λ), (σ, θ), es esta afirmación. La conjetura de Chang, a secas, es $(\omega_2, \omega_1) \twoheadrightarrow (\omega_1, \omega)$.

Por ejemplo, $\twoheadrightarrow$ es transitiva: si $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\sigma, \theta)$ y $(\sigma, \theta) \twoheadrightarrow (\mu, \nu)$, entonces $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\mu, \nu)$. Trivialmente, $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\omega, \omega)$ si κ y λ son infinitos $\big($y si $\lambda < \omega \leq \kappa$, $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\omega, \lambda)\big)$. De hecho, $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\mu, \lambda)\, \forall \mu \in [\lambda, \kappa]$. Pero, excepto por esto, los resultados respecto a la relación $\twoheadrightarrow$ son bastante más elaborados y suelen involucrar cardinales grandes.

Mencionamos 2:

- Si κ es Ramsey, $\mu \leq \lambda < \kappa$, $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\kappa, \mu)$. En contraste, $(\kappa, \lambda) \not\twoheadrightarrow (\kappa, \mu)$ para $\mu < \operatorname{cf} \kappa < \lambda < \kappa$.
- $\mathrm{Con}(\exists \kappa\, \kappa \text{ Ramsey}) \longrightarrow \mathrm{Con}(\text{Conjetura de Chang})$.

[ChKe] y [K] sirven como referencias.

La mención de cardinales grandes es necesaria:

Teorema 65. *[Silver] La conjetura de Chang implica que $0^\sharp$ existe.*

Dem: Sea $\langle A, R, E\rangle \prec \langle \mathrm{L}_{\omega_2}, \omega_1, \in\rangle$ con $|A| = \omega_1$, $|R| = \omega$. Sea (por condensación) $j : \langle \mathrm{L}_\tau, \delta, \in\rangle \xrightarrow{\sim} \langle A, R, E\rangle$ el inverso del colapso transitivo de A. δ es un ordinal pues $j : \mathrm{L}_\tau \xrightarrow{\prec} \mathrm{L}_{\omega_2}$ y $j(\delta) = \omega_1$. Como $\operatorname{crit} j \le \delta < \omega_1 = |\tau|$, por el Teorema 35 $0^\sharp$ existe. $\square_{(\mathrm{T65})}$

Def. 76. $\kappa \to [\lambda]^n_{\mu,\nu} \iff \kappa, \lambda, \mu, \nu$ son cardinales, $n \in \omega$, y si $f : [\kappa]^n \to \mu$, entonces hay un $X \subseteq \kappa$ de tipo de orden λ t.q. $|f``[X]^n| \le \nu$ (compárese con la definición 5).

Lema 68. *[Rowbottom] La conjetura de Chang equivale a $\aleph_2 \to [\aleph_1]^2_{\aleph_1,\aleph_0}$.*

Dem: $\ulcorner\!\to\!\lrcorner$ Es claro: Si $f : [\omega_2]^2 \to \omega_1$ y $\langle N, \omega_1 \cap N, \in, f\restriction_{[N]^2}\rangle \prec \langle \omega_2, \omega_1, \in, f\rangle$ es como afirma la conjetura, N es testigo de que vale la relación de partición para f.

$\llcorner\!\leftarrow\!\urcorner$ Dada (s.p.d.g.) $\mathcal{M} = \langle \omega_2, \omega_1, \ldots\rangle$ tomemos funciones de Skolem para $\mathcal{M}$. Hay ω de ellas, digamos $h_0, h_1, \ldots$ con h_n m_n-aria, s.p.d.g. $m_n \le n$.

Afirmación. $\omega_2 \to [\omega_1]^2_{\omega_1,\omega} \iff \omega_2 \to [\omega_1]^{<\omega}_{\omega_1,\omega}$. $\square_{(\mathrm{Af})}$

Esto fue demostrado por Erdős y Hajnal en el 74. En [K] se da una demostración de un caso más general: $\omega_n \to [\omega_1]^{<\omega}_{\omega_1,\omega} \iff \omega_n \to [\omega_1]^n_{\omega_1,\omega}$ (proposición 8.2), pero *incompleta*[4]. Omitimos la prueba.

Nótese que, por el teorema de Erdős-Rado, bajo GCH, $\omega_n \to (\omega_2)^{n-1}_\omega$, de modo que el exponente no puede rebajarse.

Sea $f : [\omega_2]^{<\omega} \to \omega_1$ la función

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} h_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}) & \text{si } h_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}) < \omega_1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Por la afirmación, hay un $N \in [\omega_2]^{\omega_1}$ con $|f``[N]^{<\omega}| \le \omega$. Si $P = \bigcup_n h_n``[N]^{m_n}$, P es el universo de una estructura $\langle P, \omega_1 \cap P, \ldots\rangle \prec \mathcal{M}$ testigo de la conjetura de Chang para $\mathcal{M}$. $\square_{(\mathrm{L68})}$

Ver también [ErHMáRa].

Teorema 66. *[Magidor] La conjetura de Chang implica que si $\aleph_{\omega_1}$ es límite fuerte, entonces $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{\omega_2}$.*

Nótese que, por el Corolario 9 (o el 19), sin la conjetura puede demostrarse que $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{(2^{\omega_1})^+}$.

Dem: Daremos 2 demostraciones, una en detalle.

1) [Galvin] —También observado por Benda y por Shelah, independientemente—. Seguimos la notación de la sección 1 del capítulo 1, específicamente del Lema 24, aunque remplazando $<^*$ por el más natural $<_{\mathrm{NS}_{\omega_1}}$.

[4] Ahí se muestra que si $f : [\omega_2]^{<\omega} \to \omega_1$, existe una $g : [\omega_2]^2 \to \omega$ t.q. si $s \in [\omega_2]^{<\omega} \setminus [\omega_2]^{<2}$ entonces hay un $t \in [s]^2$ con $f(s) \le g(t)$. Así, si $H \subseteq \omega_2$ y $|g``[H]^2| \le \omega$, entonces $\operatorname{Sup} ``g[H]^2 < \omega_1$. Si $\operatorname{Sup} f``[H]^{<\omega} \le \operatorname{Sup} g``[H]^2$, $f``[H]^{<\omega}$ es contable, y tenemos lo querido. Pero sólo sabemos que la desigualdad vale con $\operatorname{Sup} f``([H]^{<\omega} \setminus [H]^{<2})$. Quizás $f``[H]^1 = \omega_1$, así que esta g no serviría, y la construcción de [K] no excluye esta posibilidad.

Lema 69. *Si la conjetura de Chang vale y $\varphi \in {}^{\omega_1}\omega_1$, entonces $\|\varphi\| < \omega_2$.*

Dem: Supongamos que $\aleph_2 \to [\aleph_1]^{<\omega}_{\aleph_1,\aleph_0}$. Sea $\varphi \in {}^{\omega_1}\mathrm{ORD}$ con $\|\varphi\| \geq \omega_2$. Debemos hallar un α con $\varphi(\alpha) \geq \omega_1$.

Por el Lema 24.a), si $\beta < \gamma < \omega_1$ entonces $\varphi_\beta <_{\mathrm{NS}_{\omega_1}} \varphi_\gamma <_{\mathrm{NS}_{\omega_1}} \varphi$, de modo que hay un club en ω_1 $C_{\beta\gamma}$ con $\varphi_\beta(\delta) < \varphi_\gamma(\delta) < \varphi(\delta)\, \forall \delta \in C_{\beta\gamma}$.

Si $x \subseteq \omega_2$ es finito, sea $h(x) = \text{mín} \bigcap \{\, C_{\beta\gamma} : \beta, \gamma \in x, \beta < \gamma \,\}$. $h : [\omega_2]^{<\omega} \to \omega_1$, así que hay un $A \in [\omega_2]^{\omega_1}$ con

$$\alpha = \operatorname{Sup} h``[A]^{<\omega} < \omega_1.$$

$\alpha \in C_{\beta\gamma} \forall \beta, \gamma \in A$ con $\beta < \gamma$, pues si esto no ocurre para β_1, γ_1, y $\alpha_1 = \operatorname{Sup}(C_{\beta_1\gamma_1} \cap (\alpha+1))$, $\alpha_1 < \alpha$ (pues $\alpha_1 \in C_{\beta_1\gamma_1}$ por ser cerrado). Por definición de α, $h(x) > \alpha_1$ para algún $x \in [A]^{<\omega}$, y por tanto $h(x \cup \{\beta, \gamma\}) > \alpha$, por definición de h y α_1, lo que es una contradicción.

Entonces $\varphi_\beta(\alpha) < \varphi_\gamma(\alpha)\, \forall \beta, \gamma \in A$ con $\beta < \gamma$. Como $|A| = \omega_1$, esto implica $\varphi(\alpha) \geq \omega_1$, como demostrábamos. $\square_{(\mathrm{L69})}$

El teorema se sigue con facilidad del Corolario 10.a): Supongamos que $\aleph_{\omega_1}$ es límite fuerte. Haciendo, en el corolario citado, $\kappa = \omega_1$, $\kappa_\alpha = \aleph_\alpha$, $\sigma_\alpha = \aleph_0$, si $\alpha < \omega_1$,

$$\aleph_{\varphi(\alpha)} = \prod_{\beta<\alpha} \kappa_\beta = \prod_{\beta<\alpha} \aleph_\beta \leq \aleph^{\omega}_{\alpha+\omega} < \aleph_{\omega_1},$$

y como $\Delta = 2^{\omega_1} \sum_{\alpha<\omega_1} T(\omega_1, \omega)$,

$$2^{\omega_1} \leq \Delta \leq 2^{\omega_1} \sum_{\alpha<\omega_1} 2^{\omega_1} = 2^{\omega_1},$$

de modo que el corolario se aplica y

$$2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph^{\omega_1}_{\omega_1} = \prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha \leq \Delta^{+\|\varphi\|} < (\aleph_{\omega_1})^{+\aleph_2} = \aleph_{\omega_2},$$

como demostrábamos.

2) La demostración original de Magidor sigue la original de Silver del Teorema 25 (o del Corolario 12.b)). Damos la idea:

Magidor considera funciones $f : [\omega_2]^{<\omega} \to \omega_2$. Por la conjetura de Chang, si f es así, hay un $A \subseteq \omega_2$ con $f``[A]^{<\omega} \subseteq A$, $|A| = \omega_1$, $|A \cap \omega_1| = \omega_1$. Sea $\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2) = \{\, A \subseteq \omega_2 : |A| = \omega_1, |A \cap \omega_1| = \omega \,\}$. Digamos que $B \subseteq \mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)$ es *no acotado* sii $\forall C \in [\omega_2]^\omega\, \exists P \in B$ con $C \subseteq P$, y que es *cerrado* sii hay una función $f : [\omega_2]^{<\omega} \to \omega$ con $B = \{\, A \subseteq \omega_2 : f``[A]^{<\omega} \subseteq A \,\}$.

Lema 70. *Si $B \subseteq \mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)$ es cerrado, es no acotado.*

Dem: Inmediato de la conjetura de Chang: Sea $C \in [\omega_2]^\omega$, digamos $C = \{c_n\}_n$. El universo de un testigo de la conjetura para $\langle \omega_2, \omega_1, c_n, f \restriction_{[\omega_2]^n} \rangle$, donde f muestra que B es cerrado, contiene a C y está en B. $\square_{(\mathrm{L70})}$

Éste es el único lugar de la demostración donde se usa la conjetura.

Sean *club* y *no estacionario* como antes, relativizando los conceptos. Es fácil ver que el filtro club sobre $\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)$ es normal: Si $(B_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ es una colección de cerrados, sea $(f_\alpha)_\alpha$ una sucesión de testigos, y defínase f en la familia de sucesiones finitas de elementos de ω_2 (no hay pérdida de generalidad al hacer esto) por

$$f(\alpha_1)=\alpha_1, \quad f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=f_{\alpha_1}(\alpha_2,\dots,\alpha_n) \quad \text{para } n>1.$$

Entonces P es cerrado bajo f sii P es cerrado bajo f_α $\forall\alpha\in P$. Luego. f es testigo de que $\triangle_\alpha B_\alpha$ es cerrado.

Como antes, si A es estacionario (en $\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)$) y $f:A\to\omega_2$ es regresiva ($f(\alpha)\in\alpha$, es decir, f es una función de escogencia), es constante en un estacionario.

Trabajemos en $\mathrm{V}[G]$, donde G es $\mathrm{Coll}(\omega,2^{\omega_2})$-genérico. Esta extensión preserva los cardinales sobre $(2^{\omega_2})^{\mathrm{V}}$, de modo que $\aleph_{\omega_1}, 2^{\aleph_{\omega_1}}$ y $\aleph_{\omega_2}$ se preservan (ω_1 y ω_2 de V).

En $\mathrm{V}[G]$ las funciones de escogencia sobre $\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)^{\mathrm{V}}$ que estaban en V son contables, y podemos listarlas. Sea $(f_n)_n$ una enumeración. Puede conseguirse una sucesión $\subseteq$-decreciente de estacionarios (en V), $(A_n)_n$, de modo que $f_0,\dots,f_n$ son constantes en A_n (la sucesión está en $\mathrm{V}[G]$).

Se considera $M=\mathrm{V}^{\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)}/\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es un V-ultrafiltro (en $\mathrm{V}[G]$) en $\mathcal{P}(\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2))$ que contiene a los A_n. Esto nos da, como antes, una sumersión elemental j, definible en $\mathrm{V}[G]$, de V en M.

M puede no ser bien fundamentado, pero sí lo es un segmento inicial, pues puede mostrarse que $j(\omega_1)$ es bien ordenado en M (por $\in^M$) y su orden es isomorfo a ω_2, usando que $\mathcal{U}$ contiene los A_n: Si $\alpha\in M$ y $\alpha\in^M j(\omega_1)$, $\alpha=[f]$ para alguna $f:\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)\to\omega_1\in$ V. Sea $F_f:\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)\to\omega_1$ la función que envía a P en su $f(P)$-ésimo elemento (según su enumeración creciente). Como $f\in\mathrm{V}$, $F_f\in\mathrm{V}$, así que es alguna f_n, de modo que es cte. en $A_n\in\mathcal{U}$, digamos $F_f``A_n=\{\alpha_f\}$, $\alpha_f<\omega_2$.

La función $[f]\mapsto\alpha_f$ es un isomorfismo entre (los predecesores de) $j(\omega_1)$ y ω_2: Claramente es 1-1, y puede mostrarse que $\{\,P\in\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2): \mathrm{otp}(P)=\omega_1\,\}\in\mathcal{C}_{\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)}$. Así, si $\alpha<\omega_2$ y

$$f(P)=\begin{cases}\mathrm{otp}(P\cap\alpha) & \text{si } \alpha\in P\\ 0 & \text{si no}\end{cases},$$

$\operatorname{Ran} f\subseteq\omega_1$, de modo que α_f tiene sentido, y es fácil ver ahora que $\alpha_f=\alpha$.

Para $f\in {}^{\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)}\mathrm{ORD}\in\mathrm{V}$, sea $\aleph_f=[\aleph\circ f]$. Puede identificarse cada $j(\alpha)$, para $\alpha<\omega_1$, con α, y $j(\omega_1)=\omega_2$ —así, *si M fuese bien fundamentado*, la sumersión de V en su colapso tendría punto crítico ω_1—. Sea $[g]=\omega_1$, visto como elemento de $j(\omega_1)$ ("$=$"ω_2). Puede mostrarse, usando que $\aleph_{\omega_1}$ es límite fuerte, que $|\{\,[h]:[h]<\aleph_g\,\}|=\aleph_{\omega_1}$, y

$$|\{\,[h]:M\models[h]\subseteq\aleph_g\,\}|=2^{\aleph_{\omega_1}},$$

así que $M\models 2^{\aleph_g}<\aleph_{j(\omega_1)}$, por elementaridad, de modo que en M hay una inyección de $\{\,[h]:[h]\subseteq\aleph_g\,\}$ en $\{\,[h]:[h]<\aleph_{j(\omega_1)}\,\}$.

Para mostrar el teorema basta ver que $|\{\,[h]:[h]<\aleph_{\omega_1}\,\}|\le\aleph_{\omega_2}$, ya que $2^{\aleph_{\omega_1}}\neq\aleph_{\omega_2}$, por König. Nótese que

$$\{\,[h]:[h]<\aleph_{j(\omega_1)}\,\}=\bigcup_{[f]<j(\omega_1)}\{\,[h]:[h]<\aleph_{[f]}\,\}.$$

Y podemos concluir, pues $|\{[h]:[h] < \aleph_{[f]}\}| \leq \aleph_{\alpha_f}^{V[G]}$ ($= \aleph_{\alpha_f}^{V}$ si $\alpha_f \geq \omega_1$), lo que se establece por una sencilla inducción. $\square_{(\mathrm{T66})}$

Shelah [Sh2] encuentra otras aplicaciones:

Teorema 67. *Si vale la conjeura de Chang, y $\aleph_{\omega_1}(\omega)$ es límite fuerte, entonces $2^{\aleph_{\omega_1}(\omega)} < \aleph_{\omega_2}(\omega)$.* $\square_{(\mathrm{T67})}$

Acá, $\aleph_\rho(\omega)$ es el primer cardinal $\kappa = \aleph_\kappa$ de cofinalidad ρ, para ρ regular (así que, si $\rho > \omega$, es el ρ-ésimo punto fijo). Si se desea, puede definirse explícitamente $\aleph_\rho(\aleph_\alpha)$.

Def. 77. Por inducción en ρ: $\aleph_0(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$, $\aleph_1(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+\aleph_\alpha}$, $\aleph_{\beta+1}(\aleph_\alpha) = \aleph_1(\aleph_\beta(\aleph_\alpha))$ y $\aleph_\delta(\aleph_\alpha) = \bigcup_{\gamma<\delta} \aleph_\gamma(\aleph_\alpha)$ para δ límite.

Es claro que $\operatorname{cf} \aleph_{\beta+1}(\aleph_\alpha) = \operatorname{cf} \aleph_\beta(\aleph_\alpha)$ y $\operatorname{cf} \aleph_\delta(\aleph_\alpha) = \operatorname{cf} \delta$ para δ límite. En este caso, si $\aleph_\delta(\aleph_\alpha) = \lambda$, $\lambda = \aleph_\lambda$.

La demostración de Shelah generaliza el trabajo de Magidor, pero usando los rangos de Galvin y Hajnal, y también mejora sus cotas en ocasiones, considerando la relación entre varios filtros.

En [Sh7] cap. II continúa esta idea. Por ejemplo, si λ es singular y $\operatorname{pp}(\lambda) > \lambda^+$, entonces $(\lambda^+, \lambda) \not\twoheadrightarrow_{\operatorname{cf}\lambda} (\mu^+, \mu)\, \forall \mu \in [\operatorname{cf}\lambda, \lambda)$, donde el subíndice indica que se permiten $\operatorname{cf}\lambda$ funciones en las estructuras.

En la misma dirección, muestra que algunas hipótesis del estilo de la conjetura implican la existencia de álgebras de Jónsson en sucesores de singulares. En [Ko] se muestra que la consistencia de esta hipótesis es al menos la de un cardinal fuerte.

En [FMaSh1] se muestra que es consistente la conjetura *fuerte* de Chang módulo la existencia de un supercompacto. La conjetura fuerte es la afirmación: si $\mathcal{A} = \langle \omega_2, \omega_1, f_n \rangle_n$, existe un club $C \subseteq \omega_1$ t.q. $\alpha \in C$ implica que hay un $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ de tipo (ω_1, ω) con $\mathcal{B} \cap \omega_1 = \alpha$.

Generalizando la construcción que mostramos en el argumento de Magidor de un ideal sobre $\mathcal{P}^{\omega_1,\omega}(\omega_2)$, es fácil ver que $(\kappa, \lambda) \twoheadrightarrow (\kappa', \lambda')$ sii hay un ideal I fino (def. 20) ω_1-completo sobre $[\kappa]^{\kappa'}$ t.q. $x \in I$ implica $|x| = \lambda$ y $|x \cap \lambda| = \lambda'$. En el artículo citado se muestra que además se pueden exigir condiciones muy fuertes al ideal (que sea *precipitado*). En la siguiente sección veremos las consecuencias de algunas condiciones más débiles que ésta. Para resultados sobre cómo la existencia de modelos de una teoría T de algún tipo (κ, λ) dado implica la de otros de tipo (κ', λ'), en general una afirmación más débil que la conjetura de Chang (p. ej., el teorema de Vaught: Si T tiene un modelo de tipo (μ^+, μ) tiene uno de tipo (ω_1, ω)), referimos a [ChK] y a la última sección, escrita por Silver, de [Je1].

2. Ideales Saturados.

Probaremos un resultado sobre la exponencial de puntos fijos. Usamos una hipótesis adicional (que requiere de cardinales grandes), y que introducimos primero.

Def. 78. Sean $\kappa \geq \omega$ e I un ideal sobre κ. I es *λ-saturado* sii no existe $K \subseteq \mathcal{P}(\kappa) \setminus I$ t.q. $|K| = \lambda$ y $X \cap Y \in I$ para cualesquiera $X, Y \in K$ con $X \neq Y$. Así, 2-saturado es *primo*.

$$\operatorname{sat}(I) = \operatorname{mín}\{\lambda : I \text{ es } \lambda\text{-saturado}\}.$$

Es trivial que I es λ-saturado si $\lambda > 2^\kappa$, pero con $\lambda \leq 2^\kappa$ es necesario tener cardinales grandes. Del Lema de Ulam, Teorema 3, se deduce sin mucho esfuerzo que un ideal sobre κ^+ no puede ser a la vez κ^+-completo y κ^+-saturado. Un teorema de Tarski establece que, o $\mathrm{sat}(I)$ es finito (y puede ser cualquier n), o es regular $> \omega$.

Como con ultrafiltros sobre medibles, si $\kappa > \omega$ e I es κ-saturado y κ-completo, hay un ideal así que además es normal, s.p.d.g. I mismo. En tal caso, si $S \notin I$ y $f : S \to \kappa$ es regresiva, es acotada I-c.s., de modo que κ es debilmente Mahlo (no se exige κ límite fuerte).

Solovay mostró que si $\mathrm{sat}(I) \leq \kappa$, entonces κ es medible en un modelo interno. De modo que los ideales saturados permiten a los cardinales pequeños 'imitar' en cierto sentido a los grandes. En particular, pueden formarse ultrapotencias genéricas. Estos modelos fueron introducidos por Solovay, para mostrar la equiconsistencia de medibilidad con la existencia de medidas finitas no nulas κ-aditivas sobre algún $\kappa > \omega$. En tal caso, κ se dice *medible con valores reales* (real valued measurable). Estas ultrapotencias han recibido gran atención por parte de Shelah. Jech y Prikry también las han estudiado a fondo.

La existencia de un medible es equiconsistente con la de un ideal I κ-completo con $\mathrm{sat}(I) = \kappa^+$, para $\kappa > \omega$ regular. κ no tiene que ser límite necesariamente. Por ejemplo, módulo un supercompacto, en [FMaSh1] se muestra que NS_{ω_1} puede ser ω_2-saturado (por otro lado, esta afirmación es más fuerte que la existencia de medibles). En el modelo que se construye vale SCH. El teorema a continuación muestra algunas de las restricciones que resultan:

Teorema 68. *Si hay un ideal I $\aleph_2$-saturado sobre $\aleph_1$ entonces*

a) *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ entonces $2^{\aleph_1} = \aleph_2$.*
b) *Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_1}$ entonces $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$.*
c) *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ entonces $2^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_2}$.*
d) *Si $\aleph_{\omega_1}$ es límite fuerte, $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{\omega_2}$.*
e) *Si $\aleph_{\aleph_1}(\aleph_0)$ es límite fuerte, $2^{\aleph_{\aleph_1}(\aleph_0)} < \aleph_{\aleph_2}(\aleph_0)$.*

Dem: Damos la idea. Se puede mostrar que si $2^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_1}$, entonces todo ideal ω_1-completo sobre ω_1 satisface $2^{\aleph_1} \leq 2^{\aleph_0}\,\mathrm{sat}(I)$. Esto prueba a) y b).

La demostración hace uso de una ultrapotencia genérica. Se fuerza con $\mathbb{P} = \mathcal{P}(\omega_1) \setminus I$ como orden parcial, y se forma el ultraproducto de V módulo G, G un $\mathbb{P}$-genérico (que resulta ser un ultrafiltro normal ω_1-completo sobre ω_1 en $\langle \mathrm{V}, G\rangle$). La demostración consiste en acotar $|\{\,[h] : [h] \in^M j(2^{\aleph_0})\,\}|$, de forma análoga al argumento de Magidor. Aquí, j es la sumersión asociada. Un argumento sencillo, similar al mostrado, prueba que este cardinal es a lo más $\mathrm{sat}(I)|(2^{\aleph_0})^{\mathrm{V}}|$. Como los cardinales involucrados se preservan,

$$\mathrm{V} \models 2^{\aleph_1} \leq 2^{\aleph_0}\,\mathrm{sat}(I).$$

Como ω_1^{V} es $\mathrm{crit}\, j$, ω_1 es contable en M, y $\mathrm{sat}(I) = \omega_2$ muestra que $j(\omega_1) = \omega_2$. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$, $M \models |\mathcal{P}(\omega^{\mathrm{V}})| = 2^{\aleph_0} = \aleph_{j(\omega_1)} = \aleph_{\omega_2^{\mathrm{V}}}$. Pero $\aleph^M_{\omega_2^{\mathrm{V}}} \leq \aleph^{\mathrm{V}[G]}_{\omega_2^{\mathrm{V}}}$. Como todo cardinal $\geq \omega_2^{\mathrm{V}}$ se preserva, $\aleph^{\mathrm{V}[G]}_{\omega_2^{\mathrm{V}}} = \aleph^{\mathrm{V}}_{\omega_2}$, y tenemos c).

Para d), $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}$ por hipótesis. Como $j(\omega_1) > \omega_1$, $j(\aleph_{\omega_1}) > \aleph_{\omega_1}^{V}$, y es ω_1^V-inaccesible (por elementaridad). Esto implica facilmente que

$$M \models |(\aleph_{\omega_1}^{\omega})^V| \leq j(\aleph_{\omega_1}) \leq \aleph_{\omega_2}^V,$$

como antes. e) es similar, ahora $2^{\aleph_{\omega_1}(\omega)} = \aleph_{\omega_1}(\omega)^{\aleph_1}$, y se procede igual $\square_{(T68)}$

En [ErHMáRa] se dan argumentos puramente combinatorios sobre el cardinal de la exponencial en presencia de ideales saturados. Esto permite, por ejemplo, mostrar el Teorema 28, de Scott, sin usar ultrapotencias.

[FMaSh1] introduce técnicas nuevas que han resultado muy importantes, y han clarificado mucho la fuerza de las hipótesis de cardinales grandes requeridas para decidir diversas afirmaciones conjuntistas, varias respecto a SCH pero especialmente respecto a determinancia, y sobre todo gracias a Woodin. Antes, la forma natural de obtener ideales 'suficientemente' saturados sobre cardinales pequeños requería de cardinales huge, y Kunen de hecho introdujo el concepto de huge con este fin. [Fr] muestra un método general para conseguir estos resultados, mediante forcing iterado.

3. Puntos Fijos.

Volvamos ahora la atención hacia los puntos fijos, sobre los que casi no hemos hablado. En las secciones anteriores vimos que, en presencia de hipótesis adicionales, en ocasiones podemos acotar su exponencial.

Shelah, en [Sh4] y trabajos posteriores (ver [Sh8] caps. V,VI) muestra cómo eliminar estas hipótesis. Shelah logra, siguiendo una vez más [GH], y usando el lema de cubrimiento de Dodd y Jensen, mostrar que si $\delta = \aleph_{\omega_1}(\omega)$, $\lambda = \beth_2(\aleph_1)^+$, entonces $\gimel(\delta) = \delta^{\omega_1} = \aleph_\delta^{\omega_1} < \aleph_\lambda(\aleph_0)$. El análogo de [GH] sería $\lambda = \beth_1(\aleph_1)^+$, pero esto aun es abierto. Shelah se propone mostrar una 'tesis':

Si cf $\delta = \aleph_1$ (por ejemplo) es *pequeño*, entonces tambièn $\aleph_\delta^{\aleph_1}$ (suponiendo $\aleph_\delta$ $\aleph_1$-inaccesible). La idea de pequeño es intuitiva, claro, y se pretende hallar instancias naturales en las que valga.

Por ejemplo, si no hay inaccesibles $< \aleph_\delta$, $\aleph_\delta > \beth_2(\aleph_1)$, tampoco los hay $< \aleph_\delta^{\aleph_1}$.

Sin demostración, listamos sus resultados:

Def. 79.

1. Por inducción, definimos las clases C_α de cardinales:

$$C_0 \text{ es la clase de los cardinales infinitos,}$$
$$C_{\alpha+1} = \{\lambda \in C_\alpha : \lambda = \mathrm{otp}(\lambda \cap C_\alpha)\},$$
$$C_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha \quad \text{para } \lambda \text{ límite.}$$

   Así, C_1 es la clase de los puntos fijos.

2. $\aleph_\alpha^i(\lambda)$, por inducción en i, es:
   a. $\aleph_\alpha^0(\lambda) = \lambda^{+\alpha}$.

b. $\aleph^{i+1}_\alpha(\lambda)$, por inducción en α,

$$\aleph^{i+1}_0(\lambda)=\lambda,$$
$$\aleph^{i+1}_{\alpha+1}(\lambda)=\aleph^{i}_\gamma(\lambda),\quad \text{donde } \gamma=\aleph^{i+1}_\alpha(\lambda)+1,$$
$$\aleph^{i+1}_\delta(\lambda)=\bigcup_{\alpha<\delta}\aleph^{i+1}_\alpha(\lambda),\quad \text{si } \delta \text{ es límite.}$$

c. Si i es límite,

$$\aleph^{i}_0(\lambda)=\lambda,$$
$$\aleph^{i}_{\alpha+1}(\lambda)=\bigcup_{j<i}\aleph^{j}_{\alpha+1}(\aleph^i_\alpha(\lambda)),$$
$$\aleph^{i}_\delta(\lambda)=\bigcup_{\xi<\delta}\aleph^{i}_\xi(\lambda)\quad \text{para } \delta \text{ límite.}$$

Esto generaliza la definición 3.

Las siguientes son observaciones elementales:

• *$\aleph^i_\alpha(\lambda)$ es función monótona creciente (no necesariamente de manera estricta) de i, α, λ.*
$\aleph^i_\alpha(\lambda)\geq\lambda, i, \alpha$ y, fijos i y λ, es estrictamente creciente como función de α.
$\{\aleph^{i+1}_\delta(\lambda) : \delta \text{ es límite}\}=\{\mu : \aleph^i_\mu(\lambda)=\mu\}$.
Si ξ es límite, $\{\aleph^\xi_\alpha(\lambda):\alpha>0\}=\bigcap_{i<\xi}\{\mu:\aleph^i_\mu(\lambda)=\mu\}$.
Si $i>0$, $C_i=\{\aleph^i_\alpha(\aleph_0):\alpha>0 \text{ o } i \text{ es límite}\}$.
Si i no es límite, $\aleph^i_{\alpha+\beta}(\lambda)=\aleph^i_\beta(\aleph^i_\alpha(\lambda))$. $\square_{(\bullet)}$

Sea nor la clase de ideales normales sobre el cardinal que se esté considerando.

Teorema 69.

a) *Si $\zeta<\omega_1$, $\mathrm{pp}_{\mathrm{nor}}(\aleph^\zeta_{\omega_1}(\beth_2(\aleph_1)))<\aleph^\zeta_{\beth_2(\aleph_1)^+}(\beth_2(\aleph_1))$.*

b) *Si $\zeta<\omega_1$, λ es el ω_1-ésimo miembro de C_ζ y $\lambda>\beth_2(\aleph_1)$, entonces $\mathrm{pp}_{\mathrm{nor}}(\lambda)<$el $\beth_2(\aleph_1)^+$-ésimo miembro de C_ζ.*

c) *Si $\mu=\mu^{\aleph_1}\geq\beth_2(\aleph_1)$, $\lambda=\lambda^{\aleph_1}\geq\beth_2(\aleph_1)$ y $\omega_1=\mathrm{cf}\,\delta\leq\delta<\mu^+$, entonces si $\zeta<\omega_1$,*

$$\mathrm{pp}_{\mathrm{nor}}(\aleph^\zeta_\delta(\lambda))\leq\aleph^\zeta_{\mu^+}(\lambda).$$

Por tanto:

d) *Si $\mathrm{cf}\,\delta=\aleph_1$, $\aleph_\delta>2^{\aleph_1}$ y los (debilmente) inaccesibles $<\aleph_\delta$ son acotados, entonces no hay debilmente inaccesibles en $[\aleph_\delta,\mathrm{pp}_{\mathrm{nor}}(\aleph_\delta)]$.*

e) *Si $\mathrm{cf}\,\delta=\aleph_1$, $\aleph_\delta>2^{\aleph_1}$, $\alpha<\delta$, y*

$$\mathfrak{a}=\{\lambda:\lambda\in[\aleph_\alpha,\aleph_\delta) \text{ es debilmente inaccesible}\}$$

tiene tipo de orden ω_1, entonces

$$\{\lambda:\lambda\in(\aleph_\delta,\mathrm{pp}_{\mathrm{nor}}(\aleph_\delta)] \text{ es debilmente inaccesible}\}$$

tiene tipo de orden $<\beth_1(\aleph_1)^+$.

f) *En* d) *y* e) *se puede remplazar inaccesible por μ-Mahlo para $\mu<\aleph_1$.* $\square_{(\mathrm{T69})}$

Estos, y resultados análogos, parecían confirmar su tesis. Pero Hajnal descubrió que no todos los casos estaban cubiertos, y específicamente que no se llegaba al ω_1-ésimo elemento de C_ω. Trabajo posterior mostró que las cotas dadas no servían acá, pero Shelah lo solucionó cambiando $\beth_2(\aleph_1)^+$ por $\beth_3(\aleph_1)^+$, y haciendo arreglos análogos para cardinales mayores.

De cualquier forma, sí hay problemas, como lo terminó confirmando el siguiente teorema de [GiMa1]:

Teorema 70. *Si $V \models GCH$, κ es fuerte, $\kappa^+ < \mu$, y no hay inaccesibles sobre κ, entonces hay una extensión $V[G]$ de V que preserva cofinalidades $\geq \kappa$, t.q. en $V[G]$:*

a) *κ es el primer elemento de C_ω.*

b) $2^\kappa = \mu^+$.

c) *GCH vale bajo κ.* $\square_{(T70)}$

La demostración utiliza un lema combinatorio de [Sh5] sobre iteración de funciones que permite conseguir una sucesión de conjuntos de cardinales que cubren $(\kappa^{++}, \mu^+]$. Con esta sucesión, y usando que κ es fuerte, se consigue una sumersión $j : V \xrightarrow{\prec} M$ con ayuda de la cual se define un sistema preciso de ultrafiltros, de longitud μ^+ (ver cap. 4, sección 2). Se construye un forcing iterado con ayuda de este sistema, análogo al empleado en la demostración del Teorema 3.12 de [GiMa1], y se procede como ahí.

Es natural preguntarse entonces

Pregunta 8. ¿Para qué cardinales κ, puntos fijos, hay cotas en la exponencial? Específicamente, si κ es el *primer* punto fijo y es límite fuerte, ¿Hay alguna cota para 2^κ? En este caso la teoría de pcf no se aplica (si $\mathfrak{a}$ es un intervalo con supremo κ, no se da que $\min \mathfrak{a} > \kappa^+$), y los resultados de Shelah mostrados arriba requieren de cofinalidad no contable. En [GiMa1] se muestra que puede conseguirse que el primer punto fijo κ sea el primer contraejemplo a GCH, y que 2^κ tenga α puntos fijos debajo, $\forall \alpha < \omega_1$ (y > 0). ¿Puede hacerse $\alpha \geq \omega_1$?

4. El Cardinal de Ultraproductos.

Daremos aquí unas pocas observaciones, y no cubriremos todos los resultados. Referimos a [BeSl], [ChKe] y [ComN], a menos que especifiquemos otra cosa.

Hasta ahora nos hemos preocupado por la exponenciación. Una pregunta más general sería qué ocurre con los productos. Si estos constan sólo de cardinales infinitos, pueden convertirse en sumas de potencias (pero el problema no queda resuelto; recuérdese la conjetura de Tarski), de modo que las funciones elementales de la aritmética cardinal pueden deducirse si se conoce la función $\beth$ (o $\lambda \mapsto 2^\lambda$ para λ regular) y, para $\kappa < \lambda$, la función $\mathrm{cf}([\lambda]^{\leq\kappa}, \subseteq)$, cf. las observaciones de Shelah luego de la definición 48.

Lo cual nos dejaría con los productos de cardinales finitos, pero por la afirmación en la demostración del Lema 2 esto no representa novedad. *En cambio*, al considerar los ultraproductos, la situación cambia[5]. En general, no hay suficientes resultados sobre el cardinal de ultraproductos. Los hay, bajo hipótesis adicionales respecto a los ultrafiltros. Acá, ya

[5] Más general aun, deberíamos mirar productos reducidos. Pero acá nos restringiremos a los ultraproductos.

no es trivial ni siquiera el restringirnos a cardinales finitos. De hecho, nos centraremos en esta situación:

Sea I infinito, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, y $n_i \in \omega\, \forall i \in I$. Por Łoz, formalizado en la teoría, supondremos que $\{ i : n_i = n \} \notin \mathcal{U}$ para ningún $n \in \omega$ (o $\prod_i n_i/\mathcal{U} = n$). Luego, podemos (además) asumir que $\mathcal{U}$ no es ω_1-completo, y que los n_i no son acotados. Así, $\prod n_i/\mathcal{U}$ es infinito. Es bien conocido que entonces es al menos $2^{\aleph_0}$. En [BeSl] se da una demostración combinatoria de este hecho. En particular, si $|I| = \omega$, $\prod n_i/\mathcal{U} = 2^{\aleph_0}$. Mostraremos algo más general:

Teorema 71. *[Shelah] Si $\lambda = \prod n_i/\mathcal{U} \geq \omega$, entonces $\lambda^\omega = \lambda$.*

Dem: Sea $M = \omega^I/\mathcal{U}$, donde ω es visto como la estructura de los naturales. M es un modelo no estándar, y es fácil ver que es ω_1-saturado ([ChKe] cap. VI). Para $a \in M$, sea $\|a\| = |\{ b : b \in^M a \}|$. Por claridad, escribiremos $<$ por $\in$ (o $\in^M$).

Un sencillo conteo muestra que si $a = [(n_i)_i]$, $\|a\| = \prod n_i/\mathcal{U}$. Así, basta ver que $\|a\| \geq \omega$ implica $\|a\|^\omega = \|a\|$. Sea $\lambda = \|a\|$.

Comencemos notando que si $b, c \in M$, $\|bc\| = \|b\| \cdot \|c\|$ (bc es el producto de b y c en M), pues $xb + y$, con $x < c$ y $y < b$, recorre todos los números menores que bc, exactamente una vez. Así, $\|b^4\| = \|b\|^4$; y si $\|b\| \geq \omega$, $\|b^4\| = \|b\|$. Sean $(a_n)_{n<\omega}$ los números definidos por: $a_0 = [\![\sqrt[4]{a}]\!]$ ($[\![\sqrt[4]{x}]\!]$ es el menor n t.q. si $m > n$ entonces $m^4 > x$. Esto es definible sobre ω), $a_{n+1} = [\![\sqrt[4]{a_n}]\!]$. Cada a_n es infinito, $\|a_n\| = \lambda$, y $a_{n+1}^2 < a_n/2$ (esto vale en ω para todo $x \geq 4$).

Entonces $\sum_{n=n_1+1}^{n_2-1} a_n^2 < a_{n_1}$. Sea $C = \{ (c_n)_{n<\omega} : c_n < a_n \}$; $|C| = \prod_n \|a_n\| = \lambda^{\aleph_0}$. Si $\vec{c} \in C$, sea $p(\vec{c})$ el tipo $\{ \sum_{n\leq m} c_n a_n < x < \sum_{n\leq m} c_n a_n + a_m : m < \omega \}$.

Si $m_1 < m_2$, $\sum_{n\leq m_1} c_n a_n \leq \sum_{n\leq m_2} c_n a_n < \sum_{n\leq m_2} c_n a_n + a_{m_2} \leq \sum_{n\leq m_1} c_n a_n + a_{m_1}$, la última desigualdad por la observación al comienzo del párrafo anterior. Esto muestra que $p(\vec{c})$ es consistente, así que (por ω_1-saturación) es realizable en M, digamos por $a_{\vec{c}}$.

Nótese que $a_{\vec{c}} \leq \sum_n c_n a_n + a_0 \leq (a_0 - 1)a_0 + a_0 = a_0^2 < a$, y que $\vec{c} \mapsto a_{\vec{c}}$ es 1-1, pues si m es el mínimo t.q. $c_m^1 \neq c_m^2$ (digamos $c_m^1 > c_m^2$) para $\vec{c^1} \neq \vec{c^2} \in C$,

$$a_{\vec{c^1}} \geq \sum_{n\leq m} c_n^1 a_n = \sum_{n<m} c_n^1 a_n + c_m^1 a_m \geq \sum_{n<m} c_n^2 a_n + (c_m^2 + 1)a_m > a_{\vec{c^2}};$$

como arriba.

Entonces $\lambda = \|a\| = |\{ b : b < a \}| \geq |\{ a_{\vec{c}} : \vec{c} \in C \}| = |C| = \lambda^{\aleph_0} \geq \lambda$. $\square_{(T71)}$

El siguiente concepto surgió en [KeP] como parte de las investigaciones que, encabezadas por Keisler, trataban en los 60 sobre este tema:

Def. 80. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. $\mathcal{U}$ es *bueno* sii no es ω_1-completo y para toda $p : [I]^{<\omega} \to \mathcal{U}$ *monótona* ($p(s) \supseteq p(t)$ si $s \subseteq t$) hay una $q : [I]^{<\omega} \to \mathcal{U}$ *multiplicativa* $\big(q(s \cup t) = q(s) \cap q(t)\big)$ t.q. $q(s) \subseteq p(s)\, \forall s \in [I]^{<\omega}$.

En [KeP] se demuestra que si $\mathcal{U}$ es bueno, es regular $\big((|I|, \omega)\text{-regular}\big)$.

[Ke] introduce la clase $F(\mathcal{U})$ de cardinales realizables como el ultraproducto de una I-sucesión de naturales módulo $\mathcal{U}$. Los siguientes son sus resultados:

Teorema 72.

a) *Si* $|I| = \kappa$, $\mathcal{U}$ *es bueno, y* $\lim_{\mathcal{U}} n_i = \omega$ (*ver el Teorema 40.c) para la definición*), $\prod n_i/\mathcal{U} = 2^\kappa$.

b) *[GCH] Si* C *es cerrado en los cardinales infinitos y* $|\{\lambda \in C : \lambda < \kappa\}| < \kappa \, \forall \kappa \in C$, *hay un* $\mathcal{U}$ *con* $F(\mathcal{U}) = \{\kappa^+ : \kappa \in C\}$. $\square_{(\mathrm{T72})}$

Keisler formula entonces la siguiente pregunta, que creo que aun sigue abierta:

Pregunta 9. Bajo GCH, ¿Es $F(\mathcal{U})$ siempre de la forma indicada, para algún C como en el teorema? ¿Qué ocurre sin esta hipótesis?

En presencia de cardinales infinitos tampoco es muy claro qué esperar. En [KeP] se muestra que si $\mathcal{U}$ es regular sobre I, $|I| = \kappa$, $\kappa_i \geq \omega \, \forall i \in I$ (o $\mathcal{U}$-c.s.) entonces $\prod \kappa_i/\mathcal{U} = (\lim_{\mathcal{U}} \kappa_i)^\kappa$.

No es esta la única analogía con el caso finito. P. ej., si cada κ_i es infinito y $\mathcal{U}$ no es ω_1-completo, $\prod \kappa_i/\mathcal{U} = (\prod \kappa_i/\mathcal{U})^\omega$.

También se conocen resultados bajo hipótesis sobre uniformidad de los ultrafiltros. En [FMaSh2] se muestra cómo, comenzando con un cardinal huge, puede forzarse $|\omega^{\omega_1}/\mathcal{D}| = \omega_1$ para algún ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre ω_1. Casi todas las limitaciones en la época de [Ke] y [KeP] se debían a la falta de 'ejemplos', es decir, de ultrafiltros no principales no tan bien comportados como los que se consideraban entonces (e.g., no regulares). En [FMaSh2] también se prueba la consistencia, a partir de la existencia de huges, de ultrafiltros no (μ^+, μ)-regulares sobre cardinales pequeños μ. Para $\mu > \omega_1$ no se sabía si esto era posible, aunque sí se sabía que requería de cardinales grandes, ver [KMa] cap. III y [Gi1].

5. Preguntas Abiertas.

Los resultados que hemos presentado en este trabajo en su mayoría apenas alcanzan los 30 años, pero la teoría en que se sustentan resulta portentosa. El progreso es rápido, y cada vez más difícil.

En esta sección presentamos algunas preguntas abiertas, relacionadas con uno u otro aspecto que hallamos considerado, y cuya solución puede ayudar a brindar mayor claridad al panorama.

Para comenzar, recordamos las preguntas que hemos mencionado previamente:

Cap. 0, sec. 4.*c*:

- ¿$\mathrm{Con}(\exists\kappa\,(\kappa$ es fuertemente compacto$)) \longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\kappa\,(\kappa$ es supercompacto$))$?
- ¿Para algún δ existe $j : \mathrm{V}_{\delta+1} \xrightarrow{\prec} \mathrm{V}_{\delta+1}$ no trivial? De hecho, ¿$\exists j : \mathrm{V}_\delta \xrightarrow{\prec} \mathrm{V}_\delta$?
- ¿$\exists j : \mathrm{V} \xrightarrow{\prec} M$ con $V_\delta \subseteq M$ para un δ con $j(\delta) = \delta > \operatorname{crit} j$?

Cap. 2, sec. 1:

- ¿$|\operatorname{pcf} \mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}|$? ¿Bajo qué hipótesis puede asegurarse esto?

Cap. 3, sec. 6:

- ¿Existen core models para todas las hipótesis de cardinales grandes (h.c.g.) estudiadas hasta ahora? En caso positivo, para una definición razonable de h.c.g., si P es una h.c.g., ¿Hay un metateorema que asegure que de $\mathrm{Con}(P)$ se sigue la de la existencia de un core model donde valga P? En caso negativo, ¿Cuál es la cota superior de las hipótesis para las que hay core models?

Cap. 4, sec. 2:

- ¿Es consistente $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ y $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_{\omega_1}$? ¿Hay algún modo de formalizar la función $\chi : \alpha \mapsto \mathrm{Sup}\{\,\beta : \mathrm{Con}(\aleph_\alpha$ es límite fuerte —o $2^{\mathrm{cf}\,\alpha} < \aleph_\alpha$— y $\beth(\aleph_\alpha) = \aleph_\beta)\,\}$, para α límite (o para $\aleph_\alpha$ singular) de modo que puedan estudiarse sus propiedades? Acá, la consistencia es relativa a *alguna* h.c.g. Por ejemplo, una respuesta negativa a la primera parte de la pregunta equivaldría a $\chi(\omega) = \omega_1$. ¿Es $|\chi(\alpha)| \leq |\alpha|^+$?

Cap. 4, sec. 4:

- Sea $n \in \omega$, $n > 2$. ¿Es $\forall\kappa\,(2^\kappa = \kappa^{+n})$ consistente, módulo cardinales grandes?

Cap. 5, sec. 3:

- ¿Para qué cardinales κ, puntos fijos, hay cotas en la exponencial? Específicamente, si κ es el *primer* punto fijo y es límite fuerte, ¿Hay alguna cota para 2^κ? ¿Puede haber ω_1 o más puntos fijos menores que 2^κ?

Cap. 5, sec. 4:

- Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre I, infinito, y $F(\mathcal{U}) = \{\,|\dot{\prod}_i n_i/\mathcal{U}| : (n_i)_i$ es una I-sucesión de naturales$\,\} \setminus \omega$. ¿Es $F(\mathcal{U}) = \{\,\kappa^+ : \kappa \in C\,\}$ para C una clase de cardinales infinitos? ¿(Bajo GCH) es tal C necesariamente cerrada?

Concluimos con algunas otras:

Pregunta 10. También merece atención el estudio de la exponencial en ausencia de elección. Shelah ha obtenido algunos resultados, varios respecto a la estructura de pcf, pero en general no se han estudiado posibles relaciones o limitaciones. ¿Qué puede decirse de esto?

La siguiente pregunta es debida a Shelah y Woodin (1983). Recuérdese el resultado de [BelJeW] mencionado antes del Teorema 36:

Pregunta 11. Supongamos $\mathrm{V} \models \mathrm{GCH}$, y que $\mathrm{V}[r]$ es una extensión genérica (tal vez por una clase propia) obtenida adicionando un real. ¿Puede fallar GCH siempre en $\mathrm{V}[r]$?

Y, por último,

Pregunta 12. ¿Hay algo como 'modelos canónicos' para fallas de SCH? Por ejemplo, ¿Si $\mathrm{V} \models o(\kappa) = \kappa^{++}$, hay un modelo interno de V donde SCH falle para algún cardinal $< \kappa$? En tal caso, ¿Hay una teoría de estructura fina para tal modelo? El ejemplo dado no es el mejor, pero la pregunta puede ser relevante si no hay, por ejemplo, core models para supercompactos.

Referencias

[B1] Stewart Baldwin, *The $\lhd$-Ordering on Normal Ultrafilters*, The Journal of Symbolic Logic **50** (1985) 936–952.

[B2] Stewart Baldwin, *Between Strong and Superstrong*, The Journal of Symbolic Logic **51** (1986) 547–559.

[Ba] James E. Baumgartner, *Iterated Forcing*, en *Surveys in Set Theory*, Adrian R. D. Mathias, ed., Cambridge University Press (1983) 1–59.

[BaP] James E. Baumgartner—Karel Prikry, *Singular Cardinals and the Generalized Continuum Hypothesis*, The American Mathematical Monthly **84** (1977) 108–113.

[BelJeW] Aaron Beller—Ronald B. Jensen—Philip Welch, *Coding the Universe*, Cambridge University Press, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **47** (1982).

[BeSl] John L. Bell—A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An Introduction*, North-Holland, (1969), 3a. impresión (1974).

[Bo] William Boos, *Lectures on Large Cardinal Axioms*, en *Proceedings of ISILC Kiel 1974*, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, **499** (1975) 25–88.

[BuMa] Maxim R. Burke—Menachem Magidor, *Shelah's* pcf *Theory and its Applications*, Annals of Pure And Applied Logic **50** (1990) 207–254.

[C] Georg Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, inc., traducción de Open Court (1915), reimpresión (1965).

[ChKe] Chen-Chung Chang—H. Jerome Keisler, *Model Theory*, North-Holland, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **73** 2da. edición (1977), 2da. impresión (1978).

[Co] Paul J. Cohen, *The Independence of the Continuum Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America **50** (1963) 1143–1148; **51** (1964) 105–110.

[Com] W. Wistar Comfort *Topological Groups* en *Handbook of Set-Theoretic Topology*, Kenneth Kunen—Jerry E. Vaughan, eds., North-Holland (1984).

[ComN] W. Wistar Comfort—Stylianos Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **211** (1974).

[Cu1] James Cummings, *A Model in which GCH Holds at Successors but Fails at Limits*, Transactions of the American Mathematical Society **329** (1992) 1–39.

[Cu2] James Cummings, *Possible Behaviours for the Mitchell Ordering*, Annals of Pure and Applied Logic **65** (1993) 107–123.

[Cu3] James Cummings, *Coherent Sequences versus Radin Sequences*, Annals of Pure and Applied Logic **70** (1994) 223–241.

[Cu4] James Cummings, *Possible Behaviours for the Mitchell Ordering II*, The Journal of Symbolic Logic **59** (1994) 1196–1209.

[CuSh] James Cummings—Saharon Shelah, *A Model in which Every Boolean Algebra has many Subalgebras* ([CuSh530]), The Journal of Symbolic Logic **60** (1995) 992–1004.

[D] Keith J. Devlin, *Constructibility*, Springer-Verlag, *Perspectives in Mathematical*

Logic (1984).

[DJe] Keith J. Devlin—Ronald B. Jensen, *Marginalia to a Theorem of Silver*, en *Proceedings of ISILC Kiel 1974*, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, **499** (1975) 115–142.

[Do1] Anthony J. Dodd, *Core Models*, The Journal of Symbolic Logic **48** (1983) 78–90.

[Do2] Anthony J. Dodd, *The Core Model*, Cambridge University Press, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **61** (1982).

[DoJe1] Anthony J. Dodd—Ronald B. Jensen, *The Core Model*, Annals of Pure and Applied Logic **20** (1981) 43–75.

[DoJe2] Anthony J. Dodd—Ronald B. Jensen, *The Covering Lemma for K*, Annals of Mathematical Logic **22** (1982) 1–30.

[DoJe3] Anthony J. Dodd—Ronald B. Jensen, *The Covering Lemma for* $L[U]$, Annals of Mathematical Logic **22** (1982) 127–135.

[Dr] Frank R. Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **76** (1974).

[E] William B. Easton, *Powers of Regular Cardinals*, Annals of Mathematical Logic **1** (1970) 139–178.

[ErHRa] Paul Erdős—András Hajnal—Richard Rado, *Partition Relations for Cardinal Numbers*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **16** (1965) 93–196.

[ErHMáRa] Paul Erdős—András Hajnal—Attila Máté—Richard Rado, *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals*, North-Holland, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **106** (1984).

[FMaSh1] Matthew Foreman—Menachem Magidor—Saharon Shelah, *Martin's Maximum, Saturated Ideals, and Nonregular Ultrafilters. I* ([FMSh240]), Annals of Mathematics **127** (1988) 1–47.

[FMaSh2] Matthew Foreman—Menachem Magidor—Saharon Shelah, *Martin's Maximum, Saturated Ideals, and Nonregular Ultrafilters. II* ([FMSh2452]), Annals of Mathematics **127** (1988) 521–545.

[FWo] Matthew Foreman—W. Hugh Woodin, *The Generalized Continuum Hypothesis Can Fail Everywhere*, Annals of Mathematics **133** (1991) 1–35.

[Fr] Frantisek Franek, *Saturated Ideals Obtained via Restricted Iterated Collapse of Huge Cardinals*, en *Set Theory and its Applications (Toronto, ON, 1987)*, Juris Steprāns—Stephen Watson, eds., Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, **1401** (1989) 73–96.

[Fri1] Sy D. Friedman, *Jensen's* Σ^* *Theory and the Combinatorial Content of* $V = L$, The Journal of Symbolic Logic **59** (1994) 1096–1104.

[Fri2] Sy D. Friedman, *Fine Structure and Proper Class Forcing*, por aparecer.

[GH] Fred Galvin—András Hajnal, *Inequalities for Cardinal Powers*, Annals of Mathematics **101** (1971) 491–498.

[Gi1] Moti Gitik, *Changing Cofinalities and the Nonstationary Ideal*, Israel Journal of Mathematics **56** (1986) 280–314.

[Gi2] Moti Gitik, *The Negation of the Singular Cardinal Hypothesis from* $o(\kappa) = \kappa^{++}$, Annals of Pure and Applied Logic **43** (1989) 209–234.

[Gi3] Moti Gitik, *The Strenght of the Failure of the Singular Cardinal Hypothesis*, Annals of Pure and Applied Logic **51** (1991) 215–240.

[Gi4] Moti Gitik, *On Measurable Cardinals Violating the Continuum Hypothesis*, Annals of Pure and Applied Logic **63** (1993) 227–240.

[GiMa1] Moti Gitik—Menachem Magidor, *The Singular Cardinal Hypothesis Revisited*, en *Set Theory of the Continuum*, Haim Judah—Winfried Just—W. Hugh Woodin, eds., Springer-Verlag, *Mathematical Sciences Research Institute Publication* **26** (1992) 243–279.

[GiMa2] Moti Gitik—Menachem Magidor, *Extenders Based Forcings*, The Journal of Symbolic Logic **59** (1994) 445–460.

[GiMi] Moti Gitik—William J. Mitchell, *Indescernible Sequences for Extenders, and the Singular Cardinal Hypothesis*, Annals of Pure and Applied Logic (por aparecer).

[Gö] Kurt Gödel, *Obras Completas*, Alianza Editorial, *Alianza Universidad*, **286** 2da. edición (1989).

[Ha] Felix Hausdorff, *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annalen **65** (1908) 435–505.

[J1] Thomas J. Jech, *Set Theory*, Academic Press, *Pure and Applied Mathematics* (1978).

[J2] Thomas J. Jech, *Singular Cardinals and the* pcf *Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic **1** (1995) 408–424.

[JSh1] Thomas J. Jech—Saharon Shelah, *On a Conjecture of Tarski on Products of Cardinals* ([JeSh385]), Proceedings of the American Mathematical Society **112** (1991) 1117–1124.

[JSh2] Thomas J. Jech—Saharon Shelah, *Possible* pcf *Algebras* ([JeSh476]), The Journal of Symbolic Logic **117** (1996) 313–317.

[Je1] Ronald B. Jensen, *The Fine Structure of the Constructible Hierarchy*, Annals of Mathematical Logic **4** (1972) 229–308.

[Je2] Ronald B. Jensen, *Inner Models and Large Cardinals*, The Bulletin of Symbolic Logic **1** (1995) 393–407.

[K] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, *Perspectives in Mathematical Logic* (1994).

[KMa] Akihiro Kanamori—Menachem Magidor, *The Evolution of Large Cardinal Axioms in Set Theory*, en *Higher Set Theory*, Gert H. Müller—Dana S. Scott, eds., Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, **669** (1978) 99–275.

[KReSo] Akihiro Kanamori—William N. Reinhardt—Robert M. Solovay, *Strong Axioms of Infinity and Elementary Embeddings*, Annals of Pure and Applied Logic **13** (1978) 73–116.

[Ke] H. Jerome Keisler, *Ultraproducts of Finite Sets*, The Journal of Symbolic Logic **32** (1967) 47–57.

[KeP] H. Jerome Keisler—Karel Prikry, *A Result Concerning Cardinalities of Ultraproducts*, The Journal of Symbolic Logic **39** (1974) 43–48.

[KeTa] H. Jerome Keisler—Alfred Tarski, *From Accesible to Inaccesible Cardinals*, Fundamenta Mathematicae **53** (1964) 225-308; correcciones **57** (1965) 119.

[Ko] Peter G. Koepke, *An Introduction to Extenders and Core Models for Extender Sequences*, en *Logic Colloquium '78*, North-Holland (1989) 137–182.

[Ku1] Kenneth Kunen, *Some Applications of Iterated Ultrapowers in Set Theory*, Annals of Mathematical Logic **1** (1970) 179–227.

[Ku2] Kenneth Kunen, *On the GCH at Measurable Cardinals*, en *Logic Colloquium '69*, Robin O. Gandy—Charles E. M. Yates, eds., North-Holland (1971) 107–110.

[Ku3] Kenneth Kunen, *Elementary Embeddings and Infinitary Combinatorics*, The Journal of Symbolic Logic **36** (1971) 407–413.

[Ku4] Kenneth Kunen, *Combinatorics*, en *Handbook of Mathematical Logic*, Jon Barwise, ed., North-Holland, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **90** (1977), reimpresión (1978) 371–401.

[Ku5] Kenneth Kunen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **102** (1980), 2da. impresión (1983).

[L] Richard Laver, *Making the Supercompactness of κ Indestructible under κ-Directed-Closed Forcing*, Israel Journal of Mathematics **29** (1978) 385–388.

[M1] Penelope Maddy, *Believing the Axioms. I*, The Journal of Symbolic Logic **53** (1988) 481–511.

[M2] Penelope Maddy, *Believing the Axioms. II*, The Journal of Symbolic Logic **53** (1988) 736–764.

[Ma1] Menachem Magidor, *On the Singular Cardinals Problem I*, Israel Journal of Mathematics **28** (1977) 1–31.

[Ma2] Menachem Magidor, *On the Singular Cardinals Problem II*, Annals of Mathematics **106** (1977) 517–547.

[Ma3] Menachem Magidor, *Chang's Conjecture and Powers of Singular Cardinals*, The Journal of Symbolic Logic **42** (1977) 272–276.

[Ma4] Menachem Magidor, *Changing Cofinalities of Cardinals*, Fundamenta Mathematicae **99** (1978) 61–71.

[MarSo] Donald A. Martin—Robert M. Solovay, *Internal Cohen Extensions*, Annals of Mathematical Logic **2** (1970) 143–178.

[MarSt1] Donald A. Martin—John R. Steel, *A Proof of Projective Determinacy*, Journal of the American Mathematical Society **2** (1989) 71–125.

[MarSt2] Donald A. Martin—John R. Steel, *Iteration Trees*, Journal of the American Mathematical Society **7** (1994) 1–73.

[Mi1] William J. Mitchell, *Sets Constructible from Sequences of Ultrafilters*, The Journal of Symbolic Logic **39** (1974) 57–66.

[Mi2] William J. Mitchell, *Hypermeasurable Cardinals*, en *Logic Colloquium '78*, M. Boffa—D. van Dalen—K. McAloon, eds., North-Holland (1979) 303–316.

[Mi3] William J. Mitchell, *Sets Constructed from Sequences of Measures: Revisited*, The Journal of Symbolic Logic **48** (1983) 600–609.

[Mi4] William J. Mitchell, *The Core Model for Sequences of Measures. I*, Mathematics Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **95** (1984) 229–260.

[Mi5] William J. Mitchell, *The Core Model for Sequences of Measures. II*, inédito (1984).

[Mi6] William J. Mitchell, *Indiscernibles, Skies and Ideals*, en *Proceedings of the 1983 Boulder Summer Conference in Set Theory*, American Mathematical Society, *Contemporary Mathematics*, **31** (1984) 161–182.

[Mi7] William J. Mitchell, *Applications of the Covering Lemma for Sequences of Measures*, Transactions of the American Mathematical Society **299** (1987) 41–58.
[Mi8] William J. Mitchell, *Definable Singularity*, Transactions of the American Mathematical Society **327** (1991) 407–426.
[Mi9] William J. Mitchell, *On the Singular Cardinal Hypothesis*, Transactions of the American Mathematical Society **329** (1992) 507–530.
[Mi10] William J. Mitchell, Σ^1_3-*Absoluteness for Sequences of Measures*, en *Set Theory of the Continuum*, Haim Judah—Winfried Just—W. Hugh Woodin, eds., Springer-Verlag, *Mathematical Sciences Research Institute Publication* **26** (1992) 311–355.
[MiSt] William J. Mitchell—John R. Steel, *Fine Structure and Iteration Trees*, Springer-Verlag, *ASL Lecture Notes in Logic.* **3** (1994).
[P] Karel Prikry, *Changing Measurable into Accessible Cardinals*, Dissertationes Mathematicae **68** (1970) 5–52.
[R] Lon Berk Radin, *Adding Closed Cofinal Sequences to Large Cardinals*, Annals of Mathematical Logic **22** (1982) 243–261.
[S] Dana S. Scott, *Measurable Cardinals and Constructible Sets*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **9** (1961) 521–524.
[Sh1] Saharon Shelah, *On the Cardinality of Ultraproducts of Finite Sets* ([Sh7]), The Journal of Symbolic Logic **35** (1970) 83–84.
[Sh2] Saharon Shelah, *A Note on Cardinal Exponentiation* ([Sh71]), The Journal of Symbolic Logic **45** (1980) 56–66.
[Sh3] Saharon Shelah, *Proper Forcing* ([Shb]), Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, **940** (1982).
[Sh4] Saharon Shelah, *On Power of Singular Cardinals* ([Sh111]), Notre Dame Journal of Formal Logic **27** (1986) 263–299.
[Sh5] Saharon Shelah, *The Singular Cardinals Problem: Independence Results* ([Sh 137]), en *Surveys in Set Theory*, Adrian R. D. Mathias, ed., Cambridge University Press (1983) 116–134.
[Sh6] Saharon Shelah, *Remarks on the Numbers of Ideals of Boolean Algebras and Open Sets of a Topology* ([Sh233]), en *Around Classification Theory of Models* ([Shd]), Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, **1182** (1986) 151–187.
[Sh7] Saharon Shelah, *Cardinal Arithmetic for Skeptics* ([Sh400A]), Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **26** (1992) 197–210.
[Sh8] Saharon Shelah, *Cardinal Arithmetic* ([Shg]), Oxford University Press, *Oxford Logic Guides*, **29** (1994).
[Si] Wacław Sierpiński, *Hypothese du Continu*, Monografie Mathematyczne **4** (1934), 2da. edición, Chelsea (1956).
[Sil1] Jack H. Silver, *Notes on Reverse Easton Forcing*, inédito.
[Sil2] Jack H. Silver, *On the Singular Cardinals Problem*, en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (1974) 265–268.
[So] Robert M. Solovay, *Strongly Compact Cardinals and the GCH*, en *Proceedings of the Tarski Symposium*, Leon Henkin et al., eds., American Mathemathical Society, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **25** (1974) 365–372.

[St] John R. Steel, *Inner Models with Many Woodin Cardinals*, Annals of Pure and Applied Logic **65** (1993) 185–209.

[TZ] Gaisi Takeuti—Wilson M. Zaring, *Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag, *Graduate Texts in Mathematics*, **8** (1973).

[Ta] Alfred Tarski, *Quelques Théorèmes sur les Alephs*, Fundamenta Mathematicae **7** (1925) 1–14.

[Wi] Jiří Witzany, *Any Behaviour of the Mitchell Ordering of Normal Measures is Possible*, Proceedings of the American Mathematical Society **124** (1996) 291–297.

[Wo] W. Hugh Woodin, *Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited*, The Mathematical Intelligencer **16** (1994) 31–35.